Segunda Parte

Funções e descrição de movimentos no espaço: uma breve introdução com o ***Modellus***

Atividades interdisciplinares para Matemática e Física do Ensino Secundário

Vitor Duarte Teodoro

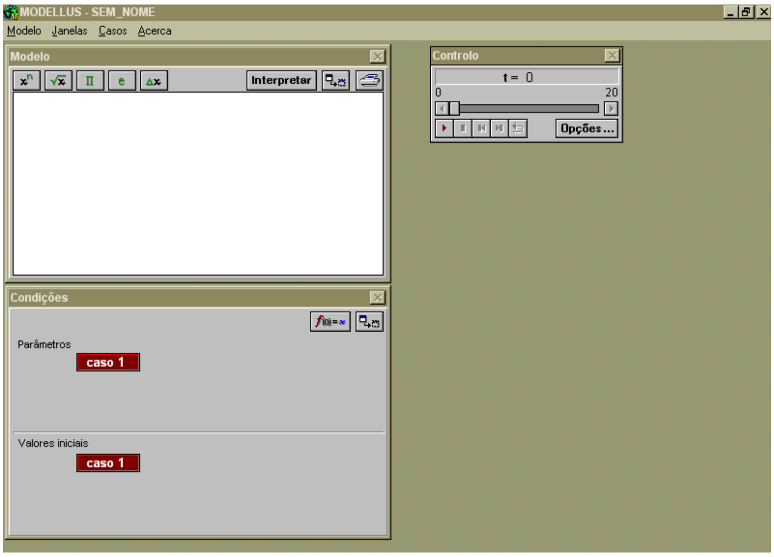
(Adaptado por Rejane Ribeiro Teixeira e Eliane Angela Veit)

1. UMA BOLA QUE SE MOVE

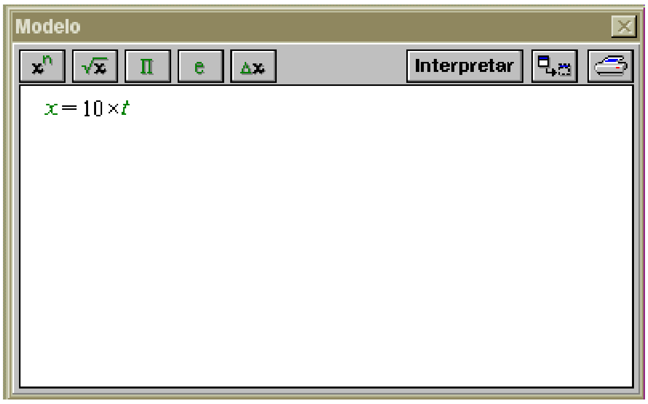
Esta é a tua primeira experiência com o Modellus. Com esta experiência ficarás conhecendo algumas das principais características do programa, por exemplo, como se constrói uma simulação simples — a simulação do movimento retilíneo de uma bola (considerada como uma partícula), a partir de uma função matemática que relaciona a abcissa da bola, num certo eixo e com uma certa escala, com o tempo.

Criar o modelo

1. Executa o programa. Aparece uma tela semelhante à seguinte (o tamanho das várias janelas pode ser maior, conforme o tamanho do monitor):



2. Escreve na janela **Modelo** a seguinte função, em que x é a variável dependente e t é a variável independente (para escreveres o sinal de multiplicação deves utilizar o sinal *):



3. Esta função x = 10 x t (no *Modellus* é sempre necessário indicar o sinal de multiplicação) nos diz que:

   - para t = 0, x = 10 x 0 = 0;
   - para t = 1, x = 10 x 1 = 10;
   - para t = 2, x = 10 x 2 = 20;
   - etc.

   Se t representar o *tempo* (em segundos) decorrido desde o início da contagem do tempo e 10 corresponder a 10 metros por segundo (m/s), o valor de x vem sempre em metros (m). Por exemplo:

   para t = 1 s, x = 10 m/s x 1 s = 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ x 1 s = 10 m

Interpretar o modelo

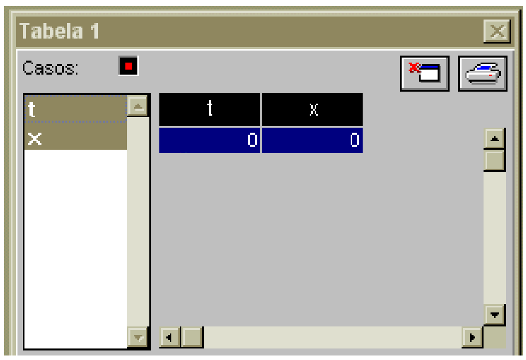
Sempre que se escreve ou altera o modelo, é necessário *clicar* no botão **Interpretar** para que o *Modellus* verifique se não há qualquer erro e possa efetuar cálculos.

Criar uma tabela de resultados

Esta função representa, pois, a posição de um objeto que se move com a velocidade de módulo 10 m/s, em linha reta, segundo o eixo dos xx, no sentido positivo do eixo. Podes observar os valores que x toma para cada valor de t na janela **Tabela**. Para tal:

1. Cria uma tabela de resultados utilizando o menu **Janelas**, opção **Nova Tabela**.

2. Seleciona com o "*mouse*" as variáveis t e x, clicando no botão esquerdo do "*mouse*" e arrastando-o sobre as duas variáveis na tabela:

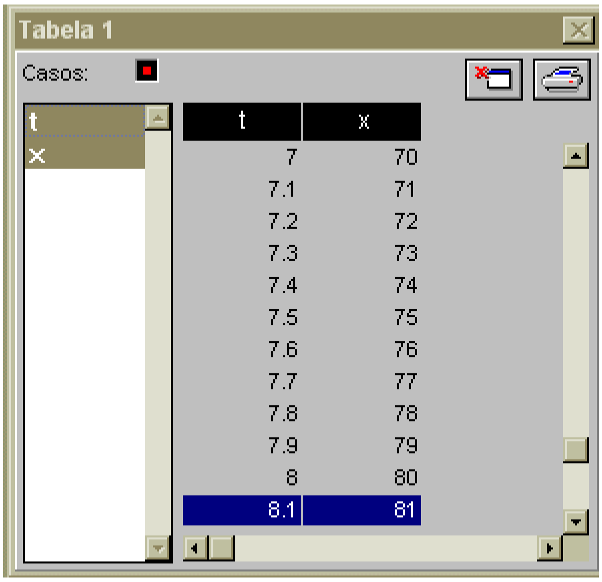


Executar o modelo

Estamos agora em condições de executar o modelo, isto é, de obter os valores da variável dependente a partir dos valores da variável independente. Para tal:

1. Clica no botão *começar* da janela **Controlo**:

2. Surge a seguinte tabela, que pode ser redimensionada nos limites da respectiva janela. A janela também pode ser reposicionada em outra zona da tela, clicando o botão esquerdo do "*mouse*", quando este se encontra sobre a barra de título da janela, e arrastando-o.



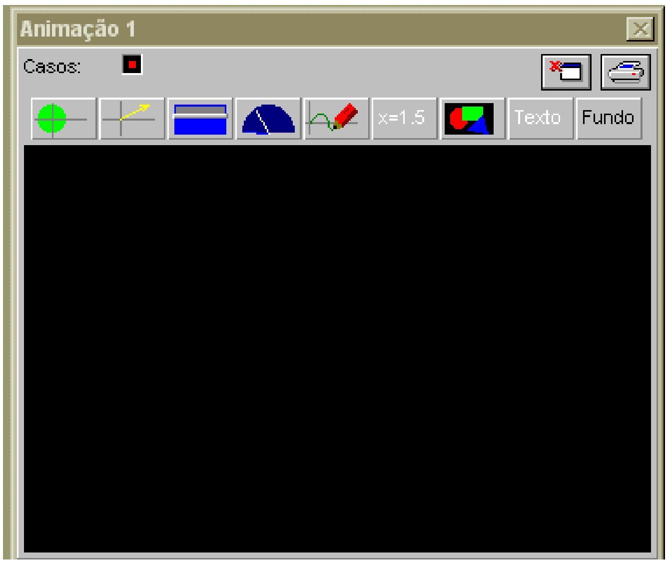
3. Esta tabela mostra os valores de *x* para os vários valores de *t*. Nota que os valores de *t* variaram de 0.1 em 0.1, desde 0 até 20. Mais adiante aprenderás a modificar estes limites e o passo de 0.1.

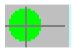
Nota: No Modellus usa-se ponto para separar as casas decimais, ao invés de vírgula.

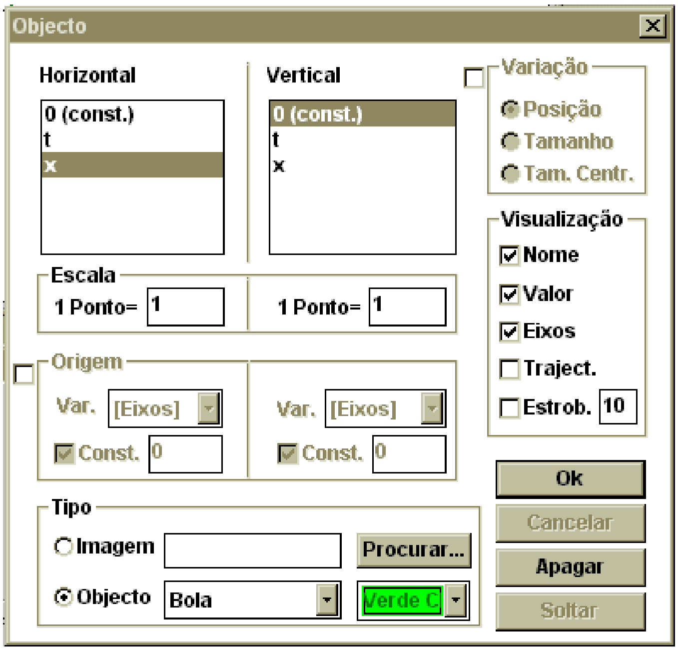
Criar uma animação do modelo

Vais agora representar o objeto movendo-se. Para tanto:

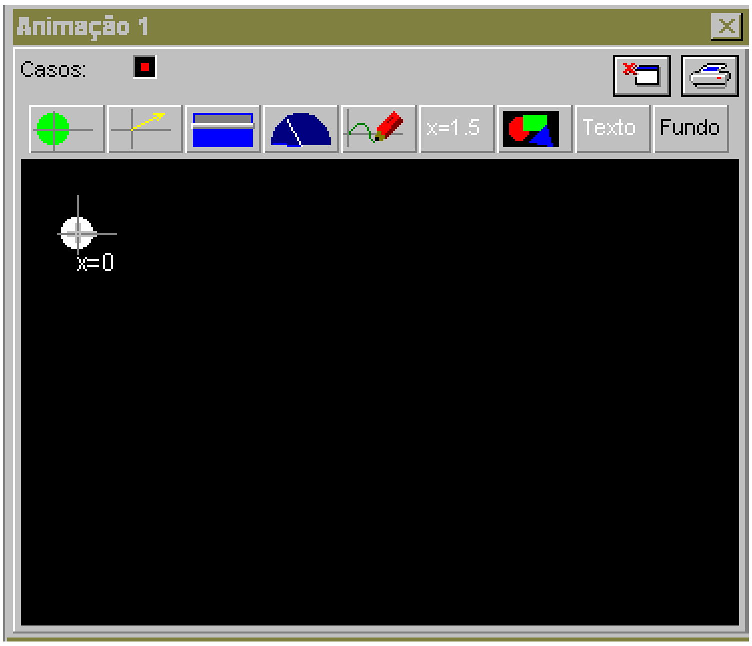
1. Escolhe no menu **Janelas** a opção **Nova Animação**. Obténs uma janela como a seguinte:



2. Seleciona o primeiro botão do lado superior esquerdo da janela, . Surge então a seguinte caixa de diálogo, que solicita informação sobre como a partícula se move e o que queres ver na tela:

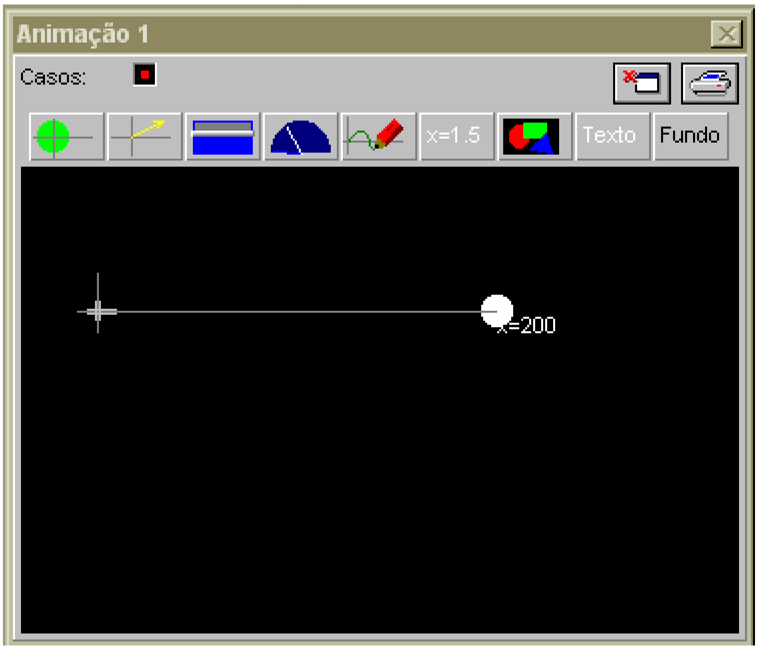


3. Observa esta caixa de diálogo. Seleciona a variável *x* na lista de variáveis para a opção **Horizontal** (estás indicando que a coordenada horizontal do objeto vai ser calculada utilizando os valores de *x*). Marca a opção **Valor**, na **Visualização**, e deixa as restantes opções sem alteração, clicando em **OK**. Obténs:



4. Coloca a bola mais ou menos no meio da janela. Para tanto, clica no botão esquerdo do “*mouse*” e arrasta até a posição desejada.

5. Clica no botão *começar*, na janela **Controlo**, e observa como varia a posição da partícula. (Uma bola pode ser considerada uma partícula).

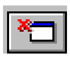


6. Se a partícula sair da parte visível da janela, redimensiona a janela de modo a ficar visível todo o percurso.

Botões no topo da janela de animação

No topo da janela de **Animação** existem dois botões que permitem, respectivamente:

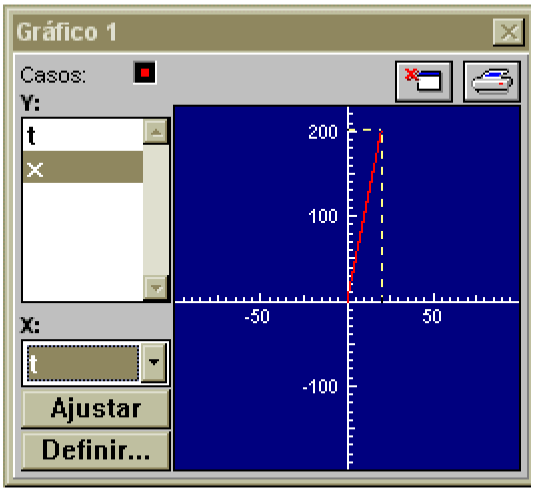
 Imprimir a janela.

 Fechar a janela. <u>Uma vez fechada a janela, perde-se seu conteúdo.</u>

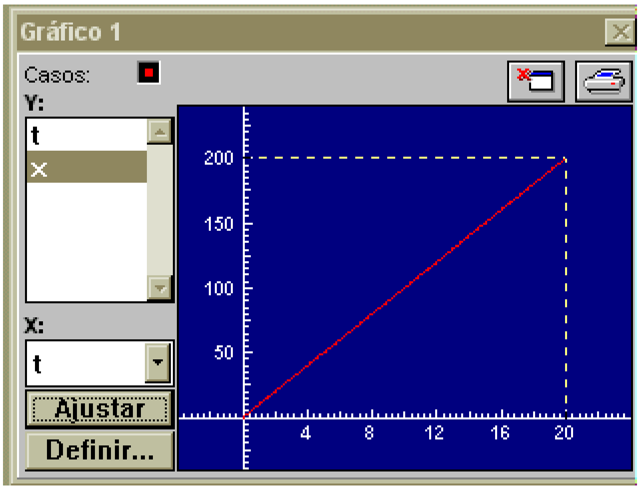
Criar um gráfico numa janela de gráficos

1. Vamos agora criar um gráfico numa janela. Seleciona no menu **Janelas** a opção **Novo Gráfico**.

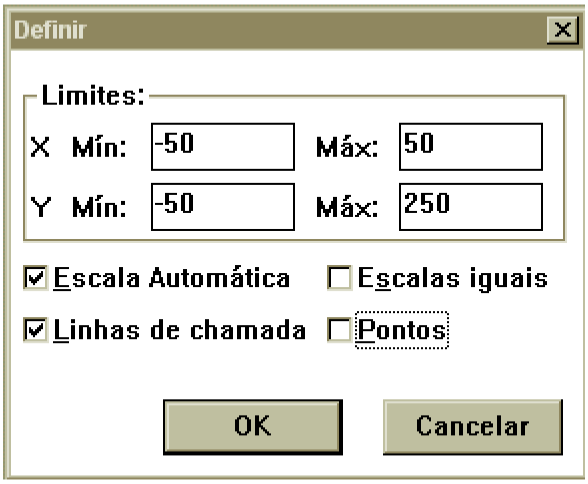
2. Executa o modelo, no botão *começar* da janela **Controlo**. Obténs um gráfico como o seguinte:



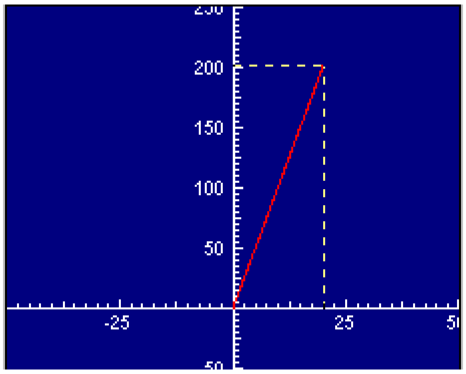
3. Para ajustar o gráfico, clica no botão **Ajustar**:



4. Podes modificar a escala de qualquer dos eixos. Por exemplo, clica no botão **Definir** da janela **Gráfico** e altera os valores mínimos e máximos de x e y :



5. Obténs, então, um gráfico como o seguinte:



6. Os dois botões do topo da janela de gráficos correspondem às mesmas *ações* dos botões iguais da janela de **Animação** (*fechar* a janela e *imprimir*).

Gravar, abrir ou criar um modelo

Sempre que quiseres podes gravar o teu modelo. Para tal, seleciona o menu **Modelo**, opção **Gravar como…** e atribui um nome ao arquivo. Esse nome só pode ter 8 caracteres (letras, números, traços - ou _). A extensão dos arquivos do *Modellus* é «.MDL», que é atribuída automaticamente pelo próprio programa. Para ler um modelo já gravado, utiliza-se igualmente o menu **Modelo**, opção **Ler…**

Para criar um novo modelo, seleciona-se no menu **Modelo** a opção **Novo**.

Experimenta

1. Altera a função para $x = 5 \times t$. Observa a animação.

2. Altera a função para $x = -5 \times t$. Observa a animação. Se necessário, modifica a posição onde a partícula se encontra, deslocando-a com o botão esquerdo do "*mouse*" para outro lado.

3. Altera a função para $x = 2 \times t$. Observa a animação.

4. Utiliza o menu **Janelas** para criar um gráfico (opção **Novo Gráfico**). Observa o gráfico de x em função de t para as várias funções.

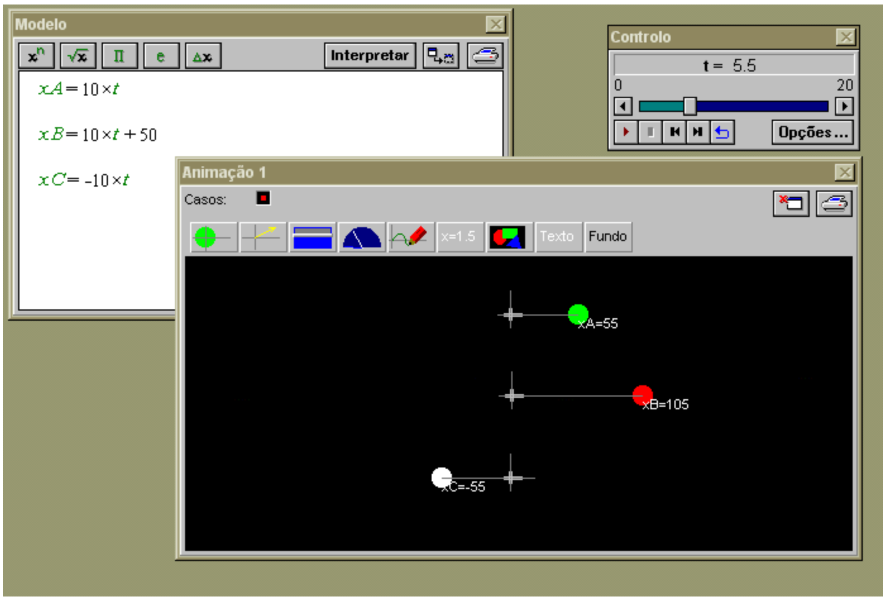
5. Altera a função para $x = 10 \times t + 20$. Observa a animação e explica o que observas. Observa um gráfico de x em função de t.

6. Altera a função para $x = 10 \times t - 20$. Observa a animação e explica o que observas. Observa um gráfico de x em função de t.

7. Altera a função para $x = -10 \times t - 20$. Observa a animação e explica o que observas. Observa um gráfico de x em função de t.

Uma sugestão útil…

Uma forma simples de comparar vários movimentos consiste em designar a abcissa dos diferentes objetos por nomes diferentes (nota que os nomes das variáveis têm de começar por uma letra e só podem utilizar letras, números ou o caractere «underscore», «_».) A figura seguinte mostra um exemplo em que se estuda o movimento de três partículas diferentes:



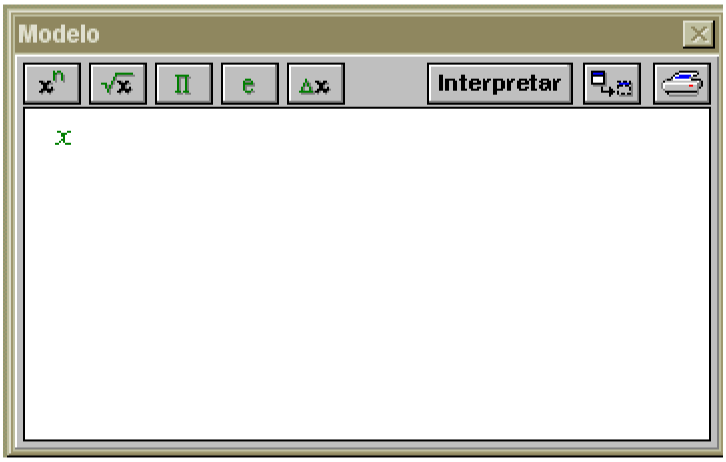
2. QUE HISTÓRIA CONTA O GRÁFICO DO PAPAI NOEL QUE ANDA?

Nesta atividade vais fazer mais experiências sobre movimentos simples, colocando uma imagem de um Papai Noel a andar para um lado e para o outro…

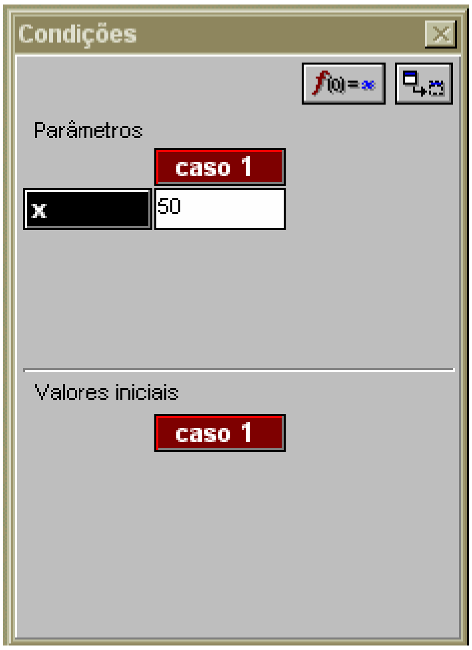
O modelo…

1. Se necessário, seleciona a opção **Novo** no menu **Modelo**.

2. Escreve na janela **Modelo** apenas a variável x, que vai representar a posição do Papai Noel no eixo dos xx:



3. Clica no botão **Interpretar**. Surge na janela **Condições Iniciais** uma caixa para se atribuir um valor inicial a x. Escreve nessa caixa o valor 50.



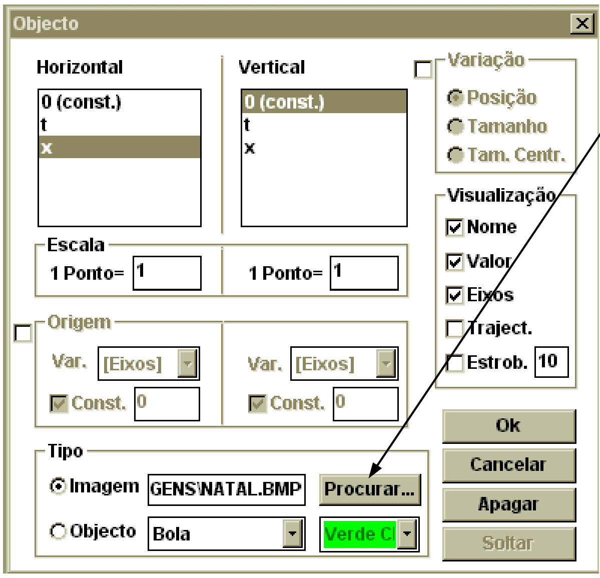
4. O valor inicial da posição do Papai Noel no eixo *Ox* vai ser 50 unidades (por exemplo, 50 metros). Essa posição vai poder ser modificada com o *"mouse"*, como vamos ver a seguir.

Criar uma animação…

1. Cria uma nova animação.

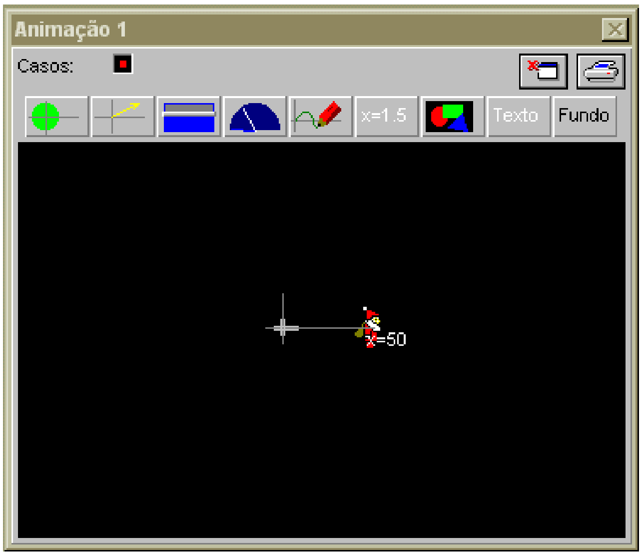
2. Cria uma nova partícula na animação.

3. Atribui à coordenada horizontal dessa partícula o valor de *x*. Indica na caixa de diálogo que queres visualizar o valor de *x*. Seleciona a imagem **NATAL.BMP** (está no diretório IMAGENS que se encontra no diretório MODELLUS) utilizando o botão **Procurar…**

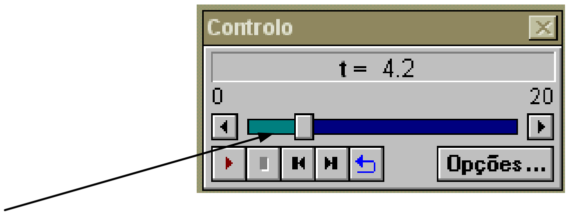


Este botão permite procurar e selecionar qualquer imagem do tipo BMP e GIF.

4. Obténs uma janela de animação semelhante à seguinte — se quiseres, podes pegar no Papai Noel ou na origem dos eixos e colocá-lo noutra região da janela, utilizando o botão esquerdo do *"mouse"*:

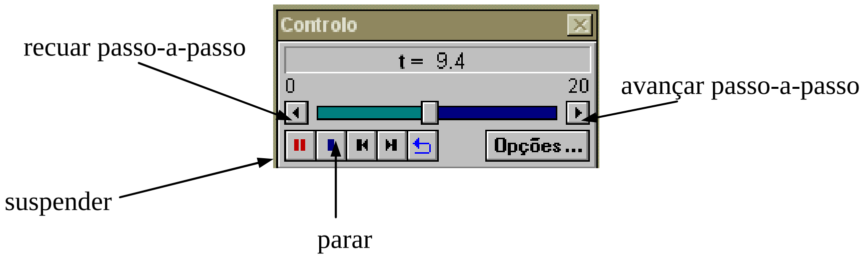


5. Clica no botão *começar*, na janela **Controlo**. Repara como a barra indica que o tempo está decorrendo, desde 0 unidades até 20 unidades:



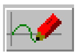
Nesta barra visualizas quanto tempo já decorreu, bem como o valor corrente da variável *t*.

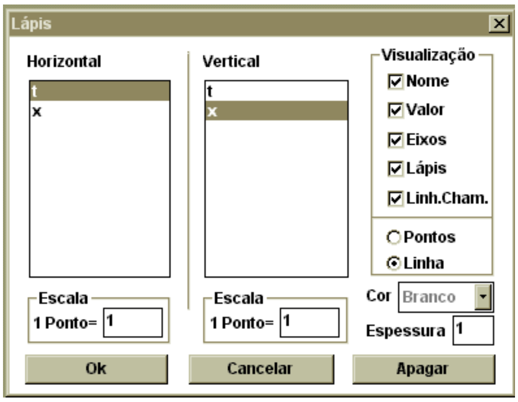
6. Em qualquer momento podes parar a simulação (no botão *parar*) ou suspender a simulação (no botão *suspender*). Quando se suspende a simulação, esta recomeça novamente no botão *suspender*.



7. Vais agora aumentar o limite superior do tempo que demora a experiência. Para tanto, clica no botão **Opções…** Surge a seguinte caixa, onde podes escrever 50 no limite superior **(Max**) do valor de *t* (não modifica o resto da caixa):

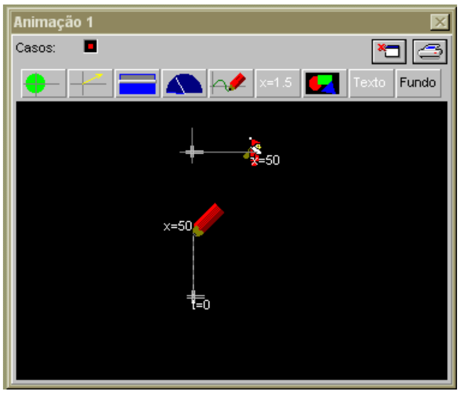
8. Nunca te esquece de clicar em **OK** após modificar o valor numa caixa como a anterior.

9. Na janela de animação também podem ser criados gráficos, além de vários outros objetos. Para tanto, seleciona o botão  (um *lápis*) na parte superior da janela de animação. Surge na tela a caixa de diálogo do *lápis*, que vai te permitir traçar um gráfico na própria janela de animação:

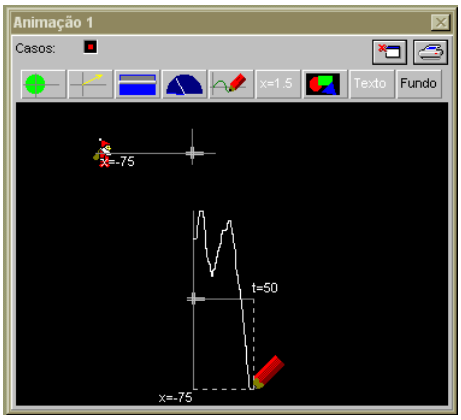


10. Seleciona a variável t na lista **Horizontal** e a variável x na lista **Vertical**. Seleciona a opção visualizar o valor e clica em **OK**.

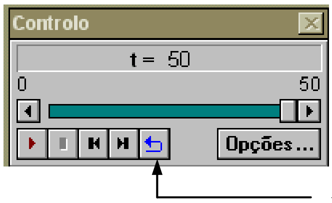
11. Obténs uma janela de animação como a seguinte (se necessário, utiliza o botão esquerdo do "*mouse*" para modificar a posição dos objetos na janela):



12. Estás agora em condições de ver um gráfico da coordenada x do Papai Noel em função do tempo t. Executa a simulação (botão *começar* na janela **Controlo**) e, enquanto decorre a simulação, move lentamente o Papai Noel com o "*mouse*" (pressionando o botão esquerdo sobre a imagem) primeiro para a direita e depois para a esquerda (também podes deixar de movê-lo):



13. Se quiseres, podes fazer *replay* da simulação, depois de pará-la ou quando se atingir o valor máximo de *t*:



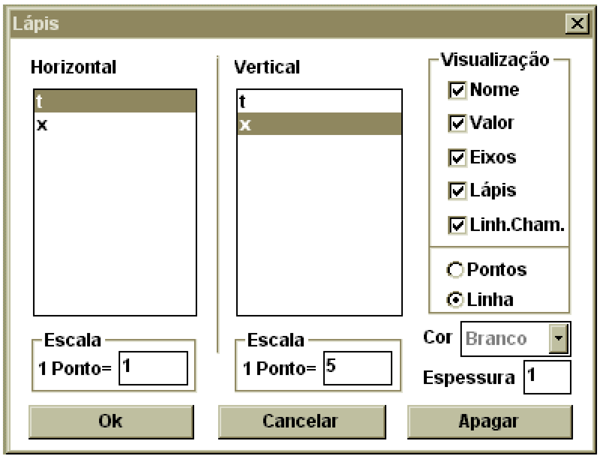
replay

Modificar as escalas no gráfico da animação

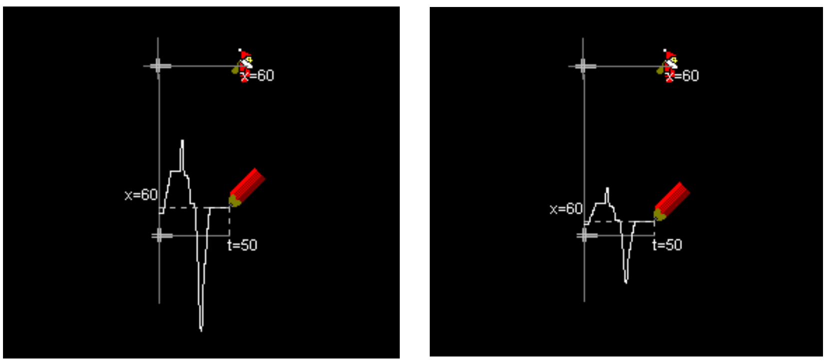
1. É necessário, freqüentemente, modificar as escalas dos eixos dos gráficos obtidos com os *lápis* na animação. Para tal, clica-se no *lápis* com o botão direito do *"mouse"* para surgir novamente a caixa das propriedades do *lápis*.

Nota: O botão esquerdo do *"mouse"* serve para selecionar e mexer nos objetos. O botão direito mostra a caixa com as características do objeto.

Clica no *lápis* com o botão direito do *"mouse"*. Surge novamente a caixa seguinte. Modifica o valor da **Escala** na lista **Vertical** de 1 para 5:

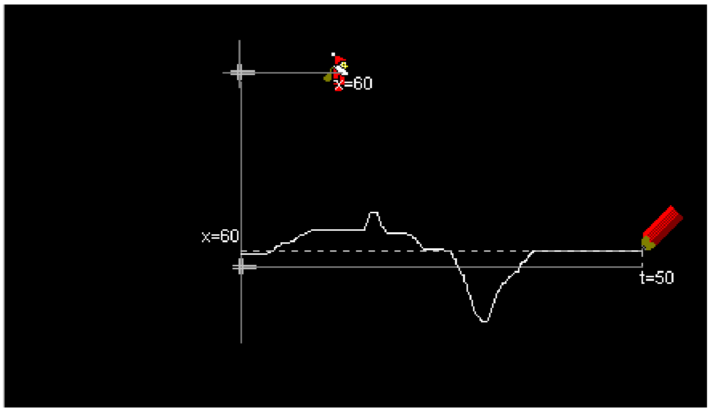


Acabaste de estabelecer uma nova escala no eixo vertical do gráfico: a cada pixel da tela (um pixel é o menor pontinho da tela) corresponde 5 unidades da variável x. Depois de clicar em OK, o gráfico *encolhe* na vertical, se já tiveres realizado uma simulação — se não o tiveres, realiza-a agora. As duas figuras seguintes comparam dois gráficos com diferentes escalas no eixo vertical:



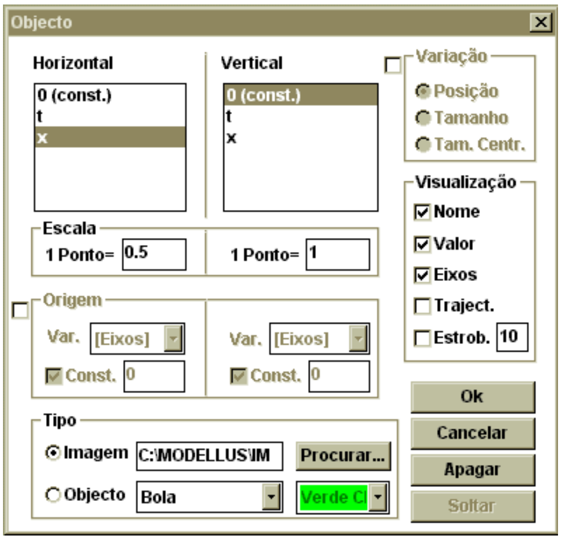
2. Vais agora modificar a escala no eixo horizontal do gráfico. Para tal, clica com o botão direito do *"mouse"* no gráfico e modifica a escala horizontal de 1 ponto = 1 unidade para 1 ponto = 0.2 unidades:

3. O gráfico «alarga», uma vez que a escala na horizontal é menor:



Modificando a escala da coordenada do Papai Noel

1. A escala das propriedades de qualquer objeto na janela de animação pode ser modificada facilmente. Por exemplo, para modificar a escala da coordenada x do Papai Noel, clica-se sobre a imagem do Papai Noel e substitui-se a escala na **Horizontal** de 1 ponto = 1 unidade de x para, por exemplo, 1 ponto = 0.5 unidades:

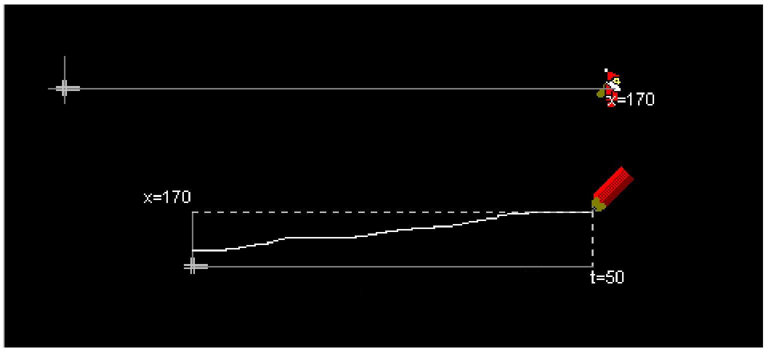


2. Nestas condições, aumenta-se a zona da janela de animação onde se observa o movimento do Papai Noel.

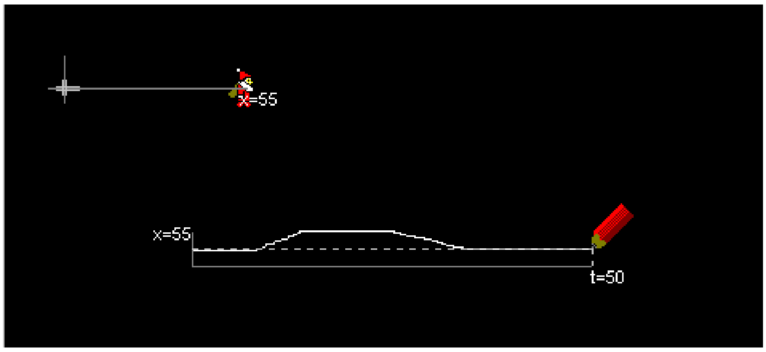
Experimenta

Procura reproduzir os seguintes gráficos, movendo o Papai Noel (a escala horizontal é de 1 ponto = 0.5 unidades de x e as escalas horizontal e vertical do *lápis* são, respectivamente, de 1 ponto = 0.2 unidades e de 1 ponto = 5 unidades):

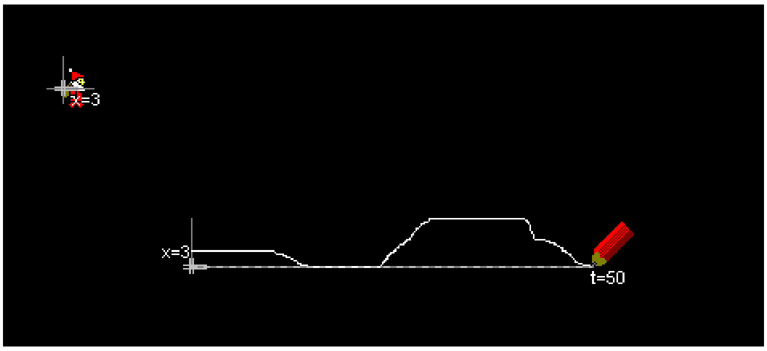
1.



2.



3.



4.

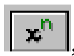
3. LANÇAR UMA BOLA PARA O AR, COM UMA PARÁBOLA…

Nesta atividade vais lançar uma bola para o ar utilizando uma função quadrática, isto é, uma função em que a variável independente surge elevada ao quadrado (sem surgir elevada a qualquer outra potência superior). Vais também aprender a construir gráficos na janela de animação.

O modelo

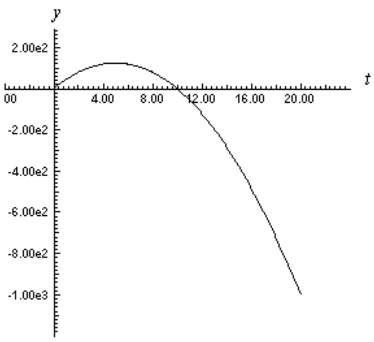
Executa o *Modellus* ou faz **Novo** no menu **Modelo**. Escreve o seguinte modelo (adiante aprenderás porque escreves este e não outro qualquer):

$$y = 50 \times t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

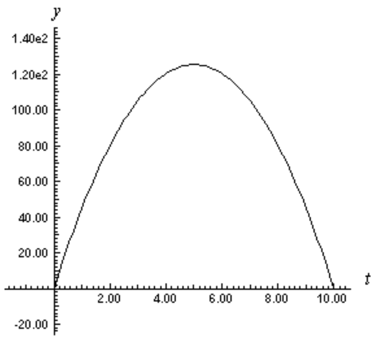
Para elevar ao quadrado podes utilizar o botão , na parte superior da janela **Modelo**.

Analisando o modelo

1. Depois de clicar no botão **Interpretar**, cria um novo gráfico, utilizando o menu **Janelas**, opção **Novo Gráfico**. Executa o modelo (e ajusta o gráfico), de modo a obteres um gráfico como o seguinte:



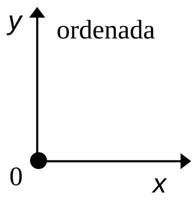
2. Observa que a função y vale 0 quando t = 0 e que volta a valer 0 quando t =10. Para valores superiores de t, os valores de y são negativos.
3. Modifica o limite superior da variável independente, clicando no botão **Opções**… da janela **Controlo**. Em vez de 20, atribui 10 unidades ao valor **Máx** da variável independente *t*.
4. Volta a executar o modelo e ajusta o gráfico. O gráfico de y é agora:



5. Analisa o gráfico. Para valores de t entre 0 e 10, o valor de y aumenta até atingir 125 ao fim de 5 unidades de t, diminuindo em seguida até 0. (Podes confirmar este valor criando uma tabela.)

6. A que grandeza pode corresponder y num lançamento vertical de bola para o ar? E t ?

7. Se considerarmos um sistema de eixos xOy (um referencial) no ponto de partida, podemos dizer que a bola, ao subir na vertical não muda o seu valor de x (fica sempre igual a 0). Pelo contrário, o valor de y aumenta com o tempo t até a bola atingir a altura máxima, diminuindo em seguida até 0, o ponto de partida.



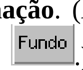
8. No modelo que estamos analisando, a variável y (variável dependente) pode então representar a ordenada y da bola no referencial Oxy, sendo a variável independente t o tempo. No SI (em todos os modelos que utilizarmos as unidades são unidades SI, salvo indicação em contrário), o tempo t é medido em segundos e a ordenada y é medida em metros.

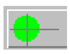
9. Como dissemos que a bola sobe na vertical, a partir da origem, podemos acrescentar ao modelo a expressão x = 0 para indicar que a coordenada x se mantém sempre constante e igual a 0:

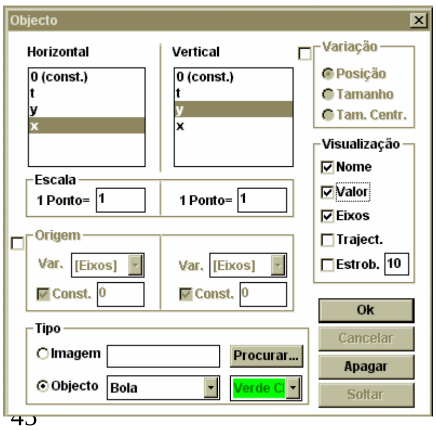
$$y = 50 \times t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

$$x = 0$$

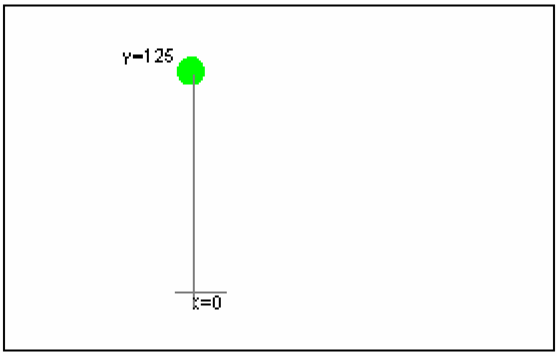
Criar uma animação da bola lançada ao ar

1. Utilizando o menu **Janelas**, cria uma nova animação na opção **Nova Animação**. (A cor de fundo das animações pode ser selecionado usando o botão .)

2. Seleciona uma bola  no topo da janela de animação e coloca-a aproximadamente no meio da janela. A coordenada horizontal da bola será descrita pela variável x e a coordenada vertical pela variável y. Selecione a visualização do valor das variáveis e clica em OK.



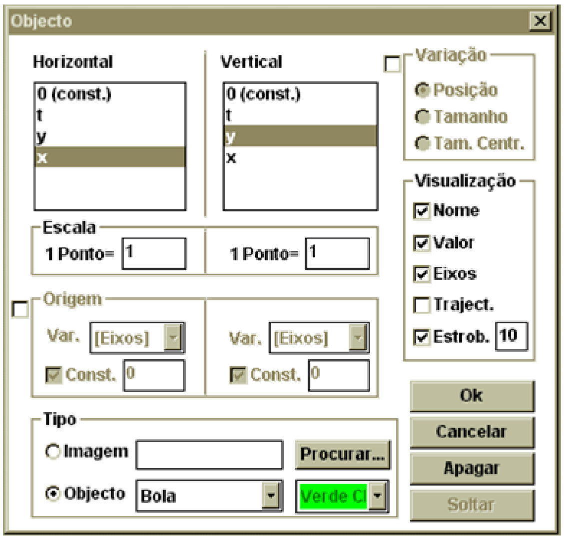
3. Executa o modelo, observando a janela de animação. Por exemplo, ao fim de 5 unidades de *t*, a janela de animação tem o seguinte aspecto:



Nota: Para maior clareza na impressão, neste manual, freqüentemente o fundo aparece em branco e os valores das variáveis em preto. Observa, entretanto, que na versão 1.11 do Modellus, que estás utilizando, o valor das variáveis sempre aparece na cor branca. (Se usares fundo branco, não os verás. Dá preferência à cor preta para o fundo).

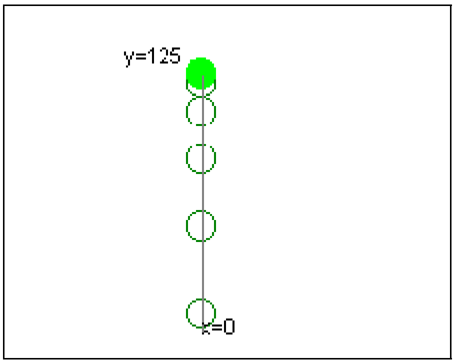
4. Como podes observar, a bola sobe durante 5 segundos, atinge a altura máxima e, em seguida, desce até ao ponto de partida, onde os valores de *y* e de *x* são 0 (esse ponto é a origem do referencial *Oxy*). Repara também que o valor de *x* se manteve sempre em 0, como seria de esperar.

5. Vais agora selecionar uma opção nas características da bola na tela. Para tal, clica com o *botão direito* do *"mouse"* na bola de modo a surgir novamente a caixa com as características da bola:



6. Seleciona a opção **Estrob.** na caixa **Visualização** da bola. Quando se seleciona esta opção, a bola deixa na tela um registro de 10 em 10 imagens (nota que está indicado o valor 10 na caixa à direita da opção **Estrob.**)

7. Executa o modelo. Deves obter, ao fim de *t* = 5, algo semelhante a:



8. Como o registro é deixado de 10 em 10 imagens e entre cada imagem decorrem 0.1 unidades de *t* (podes confirmar que é esse o passo na janela **Controlo**, botão **Opções…Passo**) conclui-se que entre cada imagem decorre 10 x 0.1 s = 1 s. Assim:

   - a primeira imagem surge quando t = 0;

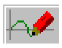
   - a segunda quando t = 1;

   - a terceira quando t = 2:

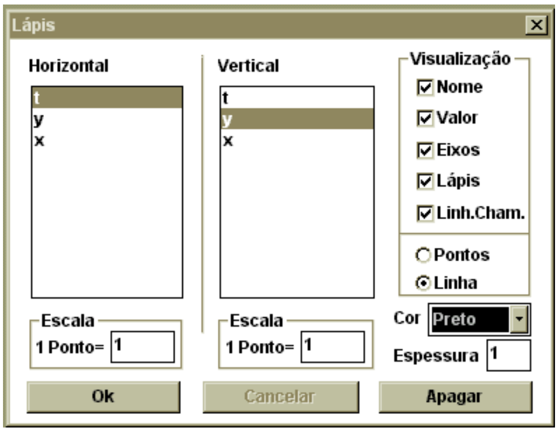
   - etc.

9. Que se pode concluir então acerca do módulo da velocidade da bola durante a subida? E durante a descida? Por quê?

Criar um gráfico na janela de animação

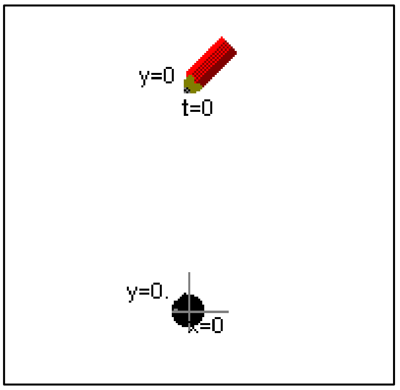
1. Clica no botão *lápis*  que está na parte superior da janela de animação.

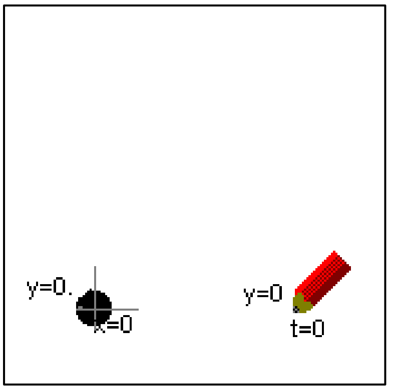
2. Surge uma caixa de diálogo para indicar que variáveis queres representar graficamente:



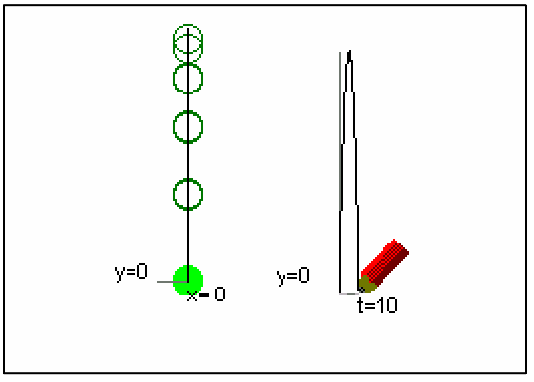
3. Seleciona na lista **Horizontal** a variável *t* e na lista **Vertical** a variável *y*. Seleciona também outra cor para o *lápis*: por exemplo, preto

4. Clica em **OK**. A janela de animação passa a ter o aspecto da figura à esquerda. Mova o lápis para a posição em que desejas construir o gráfico (para deslocar um objeto, arrasta-se esse objeto com o *botão esquerdo* do "*mouse*"). Por exemplo, na posição mostrada na figura à direita.

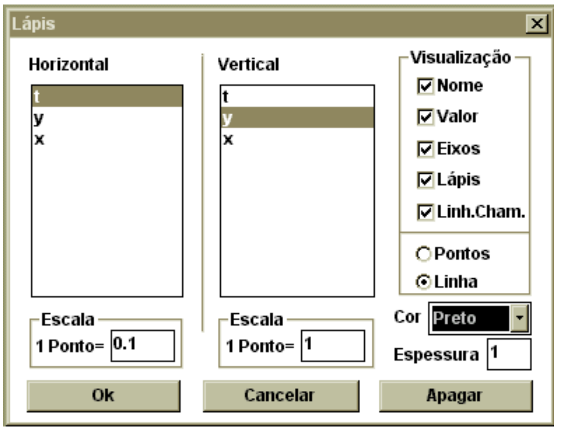




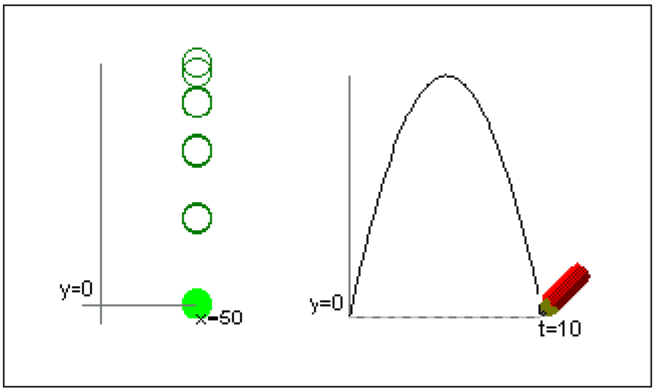
5. Executa o modelo. Obténs o seguinte, após 10 unidades de *t:*



6. Como podes observar, o gráfico traçado pelo *lápis* tem uma escala inadequada no eixo horizontal. Se diminuíres a escala, «alargas» o gráfico. Para tal, clica no *lápis* com o *botão direito* do *"mouse"* de modo a obteres novamente a caixa com as propriedades do *lápis* e faz corresponder, na escala **Horizontal**, 1 ponto a 0.1 unidades:



7. Depois de clicares OK, obténs o seguinte na janela de animação:



8. Volta a executar o modelo e observa o modo como varia a coordenada vertical durante os 10 segundos que a bola demora para subir e para descer.

Lançar a bola de um ponto diferente da origem do referencial

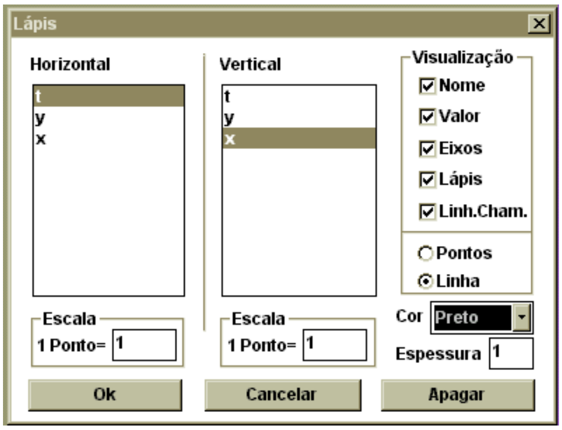
1. Vais agora analisar uma situação semelhante mas em que a bola é lançada de outro ponto. Por exemplo, suponhamos que a bola é lançada de um ponto cujas coordenadas no instante de lançamento são x = 50 m e y = 0 m. Assim, o modelo deve ser alterado para:

$$y = 50 \times t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

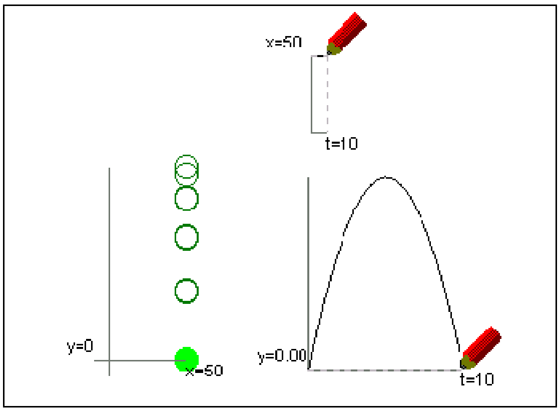
$$x = 50$$

2. Se necessário, afasta um pouco o *lápis* que já se encontra na janela de animação.

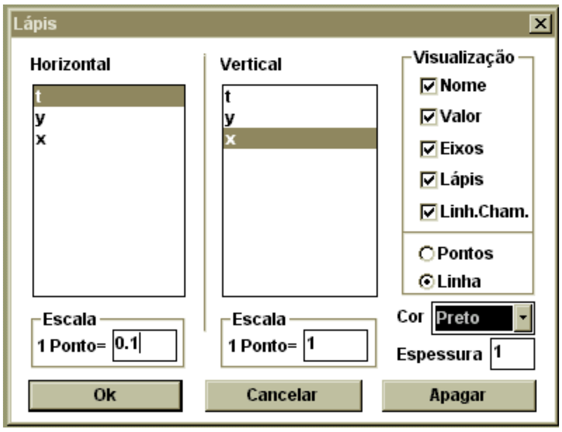
3. Acrescenta outro gráfico na animação, utilizando o botão *lápis* e indica para o eixo horizontal do gráfico o tempo t e para o eixo vertical a abcissa x. A cor do gráfico deve ser alterada para preto, se o fundo for branco:



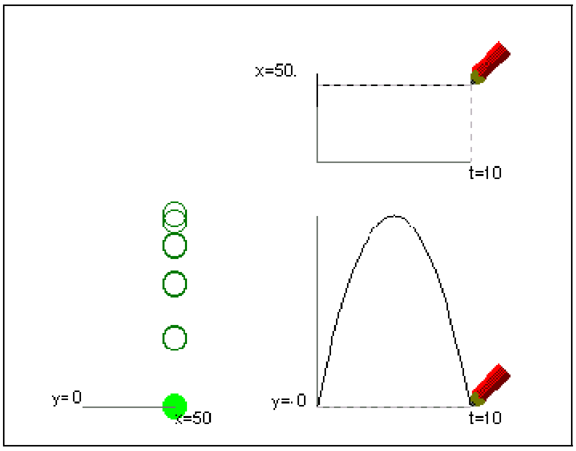
4. Depois de executares o modelo, obténs mais ou menos seguinte:



5. Como podes observar, a escala da variável *t* no gráfico de *x* em função de *t* é diferente da escala utilizada no gráfico de *y* em função de *t*. Para dar aos gráficos a mesma escala, clica com o botão esquerdo sobre o gráfico *x* em função de *t* e atribui à escala **Horizontal** o valor 0.1:



6. A janela de **Animação** passa a ter o seguinte aspecto:



7. Observa cuidadosamente a animação. Como varia a ordenada *y* à medida que o tempo *t* decorre entre 0 e 10 unidades? E a abcissa *x*?

8. Que tipo de figura geométrica é a trajetória (o *caminho percorrido*) da bola?

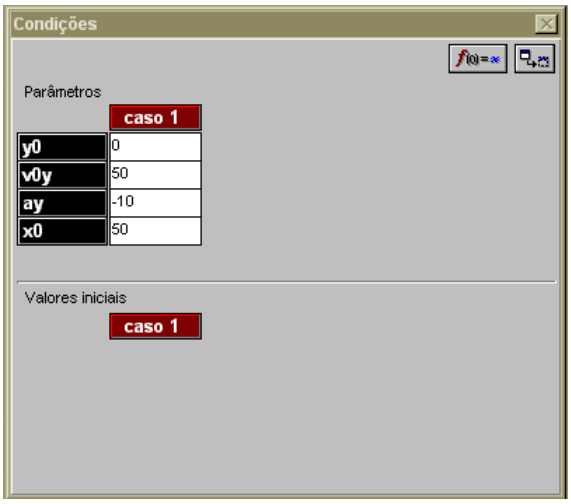
Um modelo com parâmetros

1. Volta a escrever o modelo, mas agora do seguinte modo (repara que *y0* se escreve *y* seguido do número *0*; *v0y* é a letra *v* seguida do número *0* e da letra *y*, etc.; não confunde o número *0* com a letra *O* maiúscula ou minúscula):

$$y = y0 + v0y \times t + \frac{1}{2} \times ay \times t^2$$

$$x = x0$$

2. Assim que interpretares o modelo, clicando no botão **Interpretar**, surge na janela **Condições Iniciais** diversas caixas para introdução dos valores destas variáveis ou parâmetros. Atribui os seguintes valores:



3. Executa novamente o modelo, observando a janela de animação. Deves observar exatamente o mesmo que observaste da última vez, uma vez que o modelo é o mesmo.

Por vezes, é mais prático escrever o modelo utilizando parâmetros (isto é, variáveis auxiliares) e atribuindo valores a esses parâmetros. Isso é especialmente útil sempre que se quer comparar diversas situações com o mesmo modelo e vários conjuntos de parâmetros, como verás adiante.

Equação do movimento retilíneo com aceleração constante

Um movimento retilíneo é um movimento em que a trajetória é retilínea, como é o caso da subida e descida da bola, quando lançada na vertical.

Neste tipo de movimento, se considerarmos desprezível a resistência do ar, a única força que atua na bola, uma vez lançada, é a força gravitacional, que é vertical e dirigida para baixo. Além disso, é constante ao longo de todo o movimento, na subida e na descida.

Assim que inicia a subida, a bola tem uma certa velocidade inicial. À medida que sobe, a força gravitacional, que é dirigida para baixo, retarda a bola — esta diminui a sua velocidade até se anular no instante em que atinge a altura máxima.

Enquanto desce, a bola continua sob ação da força gravitacional, dirigida para baixo, tal como a velocidade. Na descida, a força gravitacional faz com que o módulo da velocidade da bola aumente.

A *aceleração* é a grandeza vetorial que mede a taxa instantânea de variação da velocidade, uma grandeza vetorial. (Na atividade seguinte vais fazer uma primeira experiência com vetores). Um *vetor* é um objeto matemático que indica uma direção, um sentido e ao qual corresponde uma certa *magnitude*, *módulo* ou *intensidade*. Como verás a seguir, um vetor tem componentes num certo sistema de eixos.

No modelo

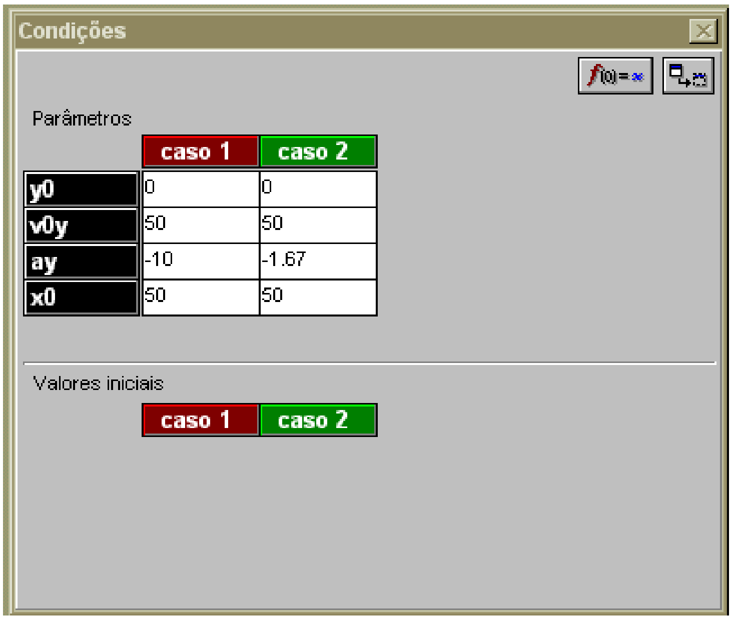
$$y = y0 + v0y \times t + \frac{1}{2} \times ay \times t^2$$

y0 representa a ordenada da bola no instante de partida (instante *0*), *v0y* a componente vertical da velocidade inicial da bola no instante *0*, e *ay* a componente da aceleração da bola (que é constante ao longo da subida e da descida, porque a força gravitacional também é constante). Na atividade 5 voltaremos a analisar este modelo com mais detalhe.

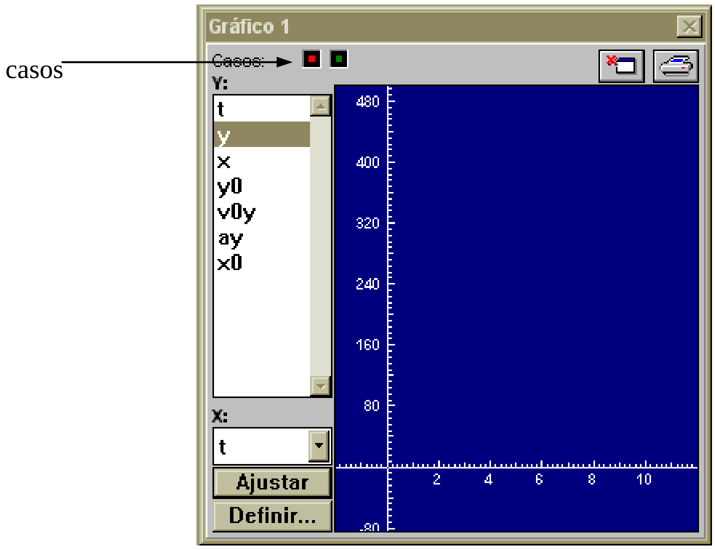
Comparando o lançamento da bola na Terra e na Lua

1. Na superfície da Lua, o módulo da aceleração é 1.67 unidades (metros por segundo ao quadrado ou m/s^2). Se quiseres comparar o lançamento da bola na Terra e na Lua podes criar um novo **Caso** no *Modellus*. Um **Caso** é um *conjunto de valores de parâmetros*.

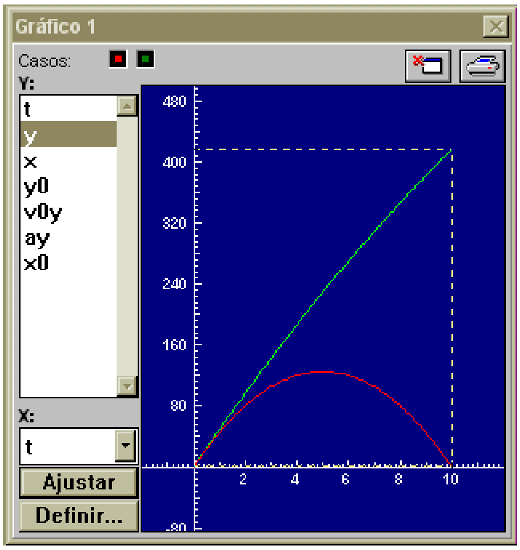
2. Para tal, no menu **Casos**, seleciona a opção **Acrescentar**. Obténs, na janela **Condições Iniciais**, um novo conjunto de valores, igual ao anterior. Altera, no novo conjunto de valores, o valor de *ay* para – 1.67:



3. Utilizando o menu **Janelas**, seleciona a opção **Novo Gráfico**. Observa os pequenos quadradinhos coloridos no topo da janela, logo à direita da palavra **Casos**. Clica sobre o segundo quadradinho para veres o gráfico referente ao segundo caso:



4. Executa o modelo e clica no botão **Ajustar**. Obténs:

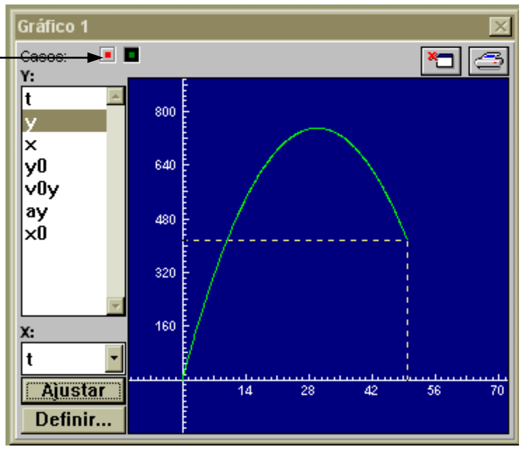


5. Como interpretar este gráfico? Repara que, na Lua, o peso de um certo corpo é menor que o peso desse mesmo corpo na Terra, uma vez que o corpo na Lua é atraído por uma força gravitacional menor do que na Terra. Logo, se a bola for lançada com igual velocidade, deve subir mais alto! Nota que 10 s depois do lançamento, a bola na Lua ainda não iniciou a descida…

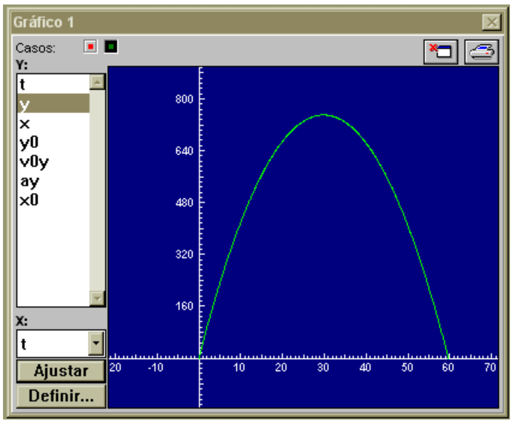
6. Vamos «dar mais tempo» ao modelo. Utilizando o botão **Opções…** da janela **Controlo**, aumenta o limite superior da variável independente *t* de 10 para 50 unidades.

7. Executa novamente o modelo e clica no quadradinho na janela de gráficos referente ao primeiro caso de modo a veres apenas o gráfico de *y* referente ao segundo caso:

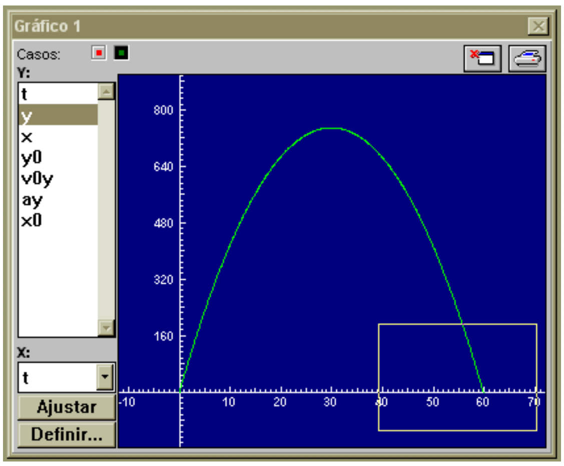
OO primeiro caso foi <<desligado>>.



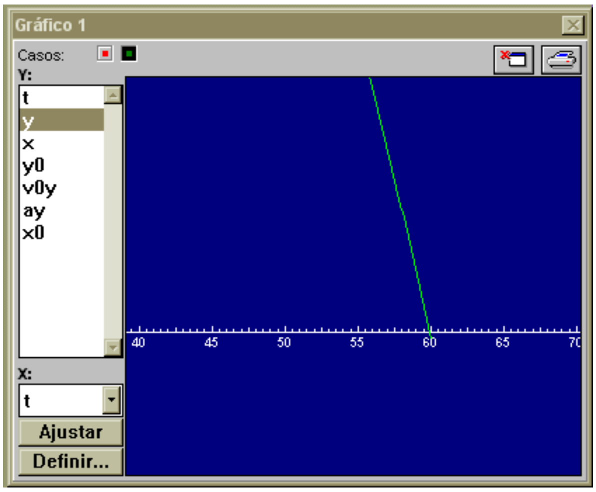
8. Como podes ver no gráfico, ao fim de 50 s a ordenada vertical ainda não voltou ao valor inicial, o valor *y* = 0, que corresponde ao ponto de partida. É necessário aumentar mais o limite superior de *t*. Aumenta esse valor para 60 (no botão **Opções…** da janela de **Controlo**) e continua a execução do modelo. Obténs o seguinte gráfico:



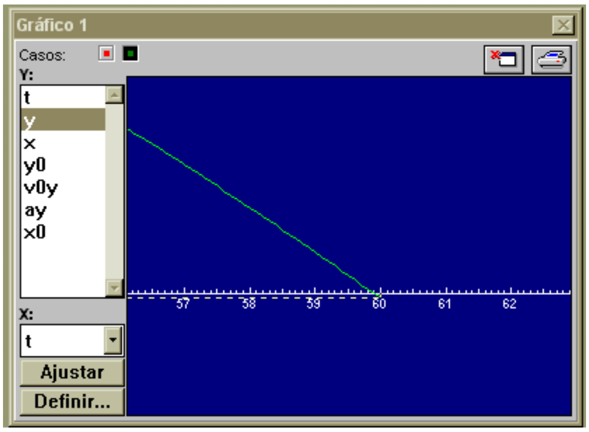
9. Como podes observar neste gráfico, o valor de *y* é aproximadamente 0 quando *t* = 60. Podes melhorar esta estimativa fazendo *zoom* sobre o gráfico na zona próxima de *t* = 60. Para tal, arrasta o *"mouse"* com o botão esquerdo pressionado nessa zona:



10. Obténs essa zona ampliada:

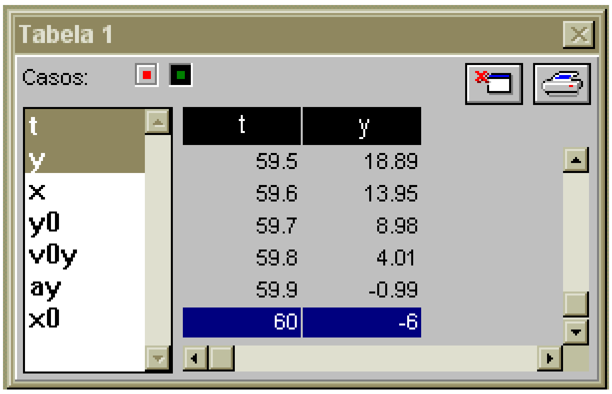


11. Podes voltar a fazer *zoom*, mais perto de t = 60:



12. Como podes observar no gráfico, o valor y é nulo para um valor de t superior a 59 s e inferior a 60 s, sendo o verdadeiro valor mais perto de 60 s do que de 59 s.

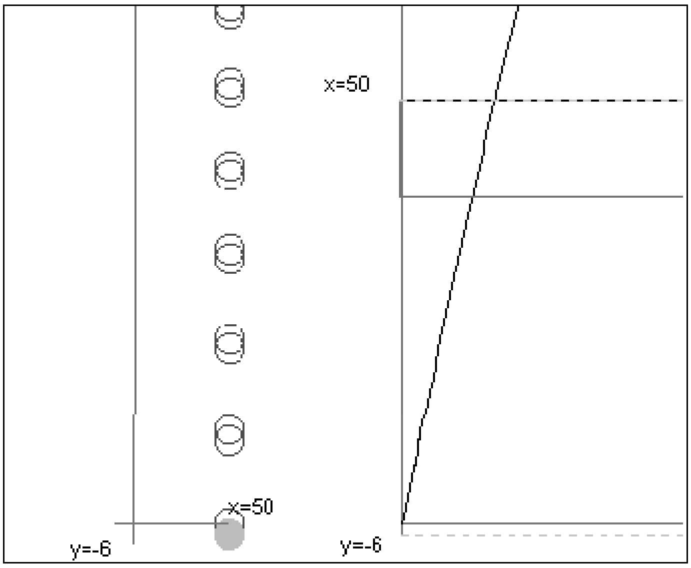
13. Portanto, podemos dizer que, na Lua, a bola demorava aproximadamente 60 s a voltar ao ponto de partida. E que altura atingia? (Se necessário, cria uma tabela de resultados para obteres a resposta).



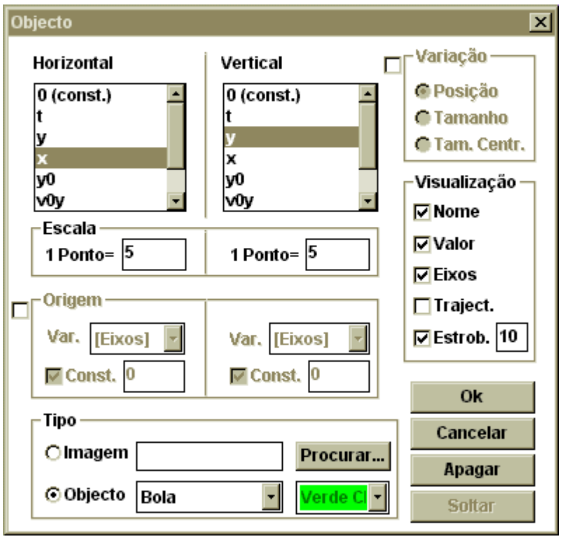
t	y
59.5	18.89
59.6	13.95
59.7	8.98
59.8	4.01
59.9	-0.99
60	-6

Animação do lançamento na Lua

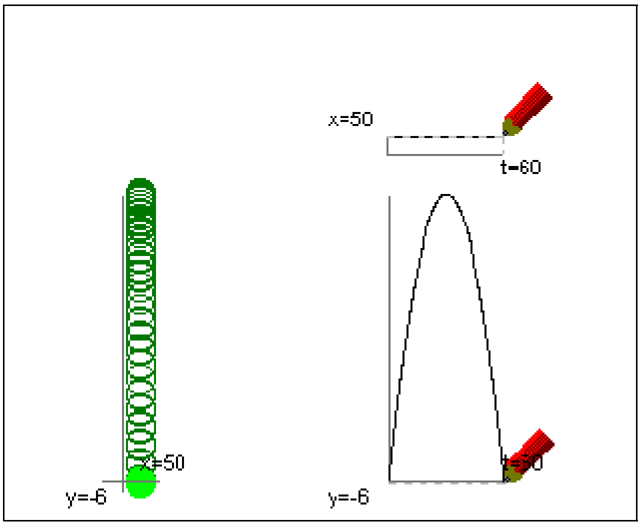
1. Como podes observar na janela de animação, se selecionares o **Caso 2** (verde) no topo da janela, as escalas utilizadas na animação do movimento e dos gráficos não são muito adequadas:



2. É necessário, pois, mudar estas escalas. Clica com o botão direito sobre a bola e muda a escala **Horizontal** e **Vertical** para 1 ponto =5 unidades:



3. Muda também as escalas dos dois gráficos para valores adequados. Por exemplo, na escala **Horizontal** pode ser 1 ponto = 1 unidade e na escala **Vertical** 1 ponto = 5 unidades. Depois de executares o modelo, deves obter algo semelhante a:



Experimenta

Qual seria a altura máxima da bola se fosse lançada, em condições idênticas, nos seguintes planetas (para cada um está indicado o respectivo *módulo* da aceleração da gravidade local):

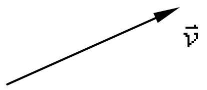
1. Marte (3.7 m/s^2)?
2. Vênus (8.9 m/s^2)?
3. Júpiter (24.8 m/s^2)?

4. EXPERIÊNCIAS COM VETORES

Há grande diferença entre um grupo de grandezas físicas, chamadas grandezas escalares, tais como a distância percorrida, a massa, a densidade, a intensidade luminosa, etc., que ficam completamente conhecidas com a sua medida, e um outro grupo de grandezas físicas, chamadas grandezas vetoriais, tais como a força, a velocidade, a aceleração, o deslocamento, etc., que não ficam completamente conhecidas através da sua medida. Os cálculos com grandezas escalares e com grandezas vetoriais não obedecem às mesmas regras, porque os vetores, além da *magnitude* ou *medida*, têm uma *direção* e um *sentido* que têm de ser levados em conta nas operações matemáticas. As grandezas vetoriais são representadas por vetores. As regras de cálculo com vetores constituem o chamado *cálculo vetorial*.

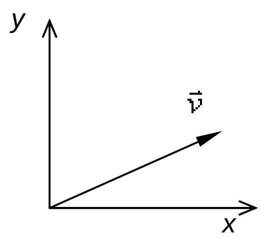
Vetores: representação cartesiana

Consideremos um vetor num plano, por exemplo, o plano desta folha[1] :



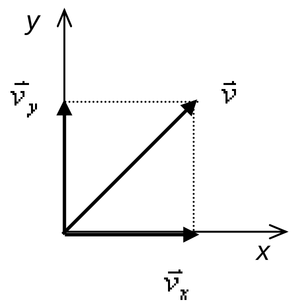
A direção e o sentido do vetor é a direção e o sentido da seta e a magnitude do vetor é determinada pelo comprimento da seta, numa escala adequada.

Associemos a este vetor um sistema de eixos *yOx* com origem na cauda do vetor:

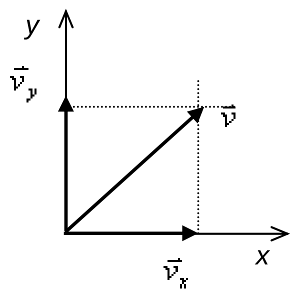


[1] Por convenção internacional, um vetor representa-se por uma letra em **negrito** (**“*bold*”**) ou por uma letra em itálico com uma seta. Por exemplo: **v** ou $\vec{v}$. A magnitude ou módulo do vetor pode representar-se por v . Alguns autores utilizam o conceito de **norma** de um vetor em vez de **módulo** do vetor. Não utilizamos esta notação porque há, de fato, vários tipos de norma de um vetor. A *norma euclideana* é igual ao módulo do vetor.

Este vetor pode ser considerado como a *soma* de dois outros vetores, orientados segundo os eixos dos *xx* e dos *yy.* De fato, de acordo com a regra do paralelogramo, regra geométrica para somar vetores, tem-se:



Os vetores orientados segundo os eixos, $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$, são designados por componentes vetoriais do vetor $\vec{v}$. As componentes vetoriais, como coincidem com o respectivo eixo, podem ser representadas, sem ambigüidade, por um escalar, positivo ou negativo, consoante a componente seja dirigida no sentido positivo ou no sentido negativo. Por exemplo, numa escala em que cada milímetro corresponde a uma unidade, tem-se:

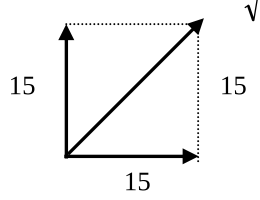


$\vec{v}_y$: comprimento = 15 mm
magnitude = + 15 unidades

$\vec{v}_x$: comprimento = 15 mm
magnitude = + 15 unidades

Note-se que a magnitude do vetor $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ *não* é + 30 unidades. De fato, utilizando uma régua, conclui-se que a magnitude do vetor é 21.2 unidades. Este valor pode ser *calculado* utilizando o teorema de Pitágoras, que relaciona os lados de um triângulo retângulo com a respectiva hipotenusa:

$$\sqrt{15^2 + 15^2} = 21.2$$



Criar um vetor na janela de Animação

Vais agora criar um vetor no *Modellus*.

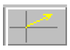
1. Cria o seguinte modelo:

$$vx = 40$$

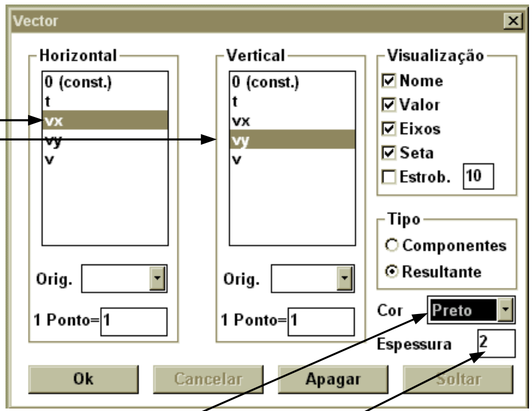
$$vy = 40$$

$$v = \sqrt{\left(vx^2 + vy^2\right)}$$

2. Interpreta o modelo e cria uma **Tabela**. Verifica que o valor de v é 56.57 unidades.

3. Cria uma **Animação**. Nessa animação utiliza o "*mouse*" para clicar no símbolo do vetor  Na caixa de características desse vetor assinala as seguintes opções:

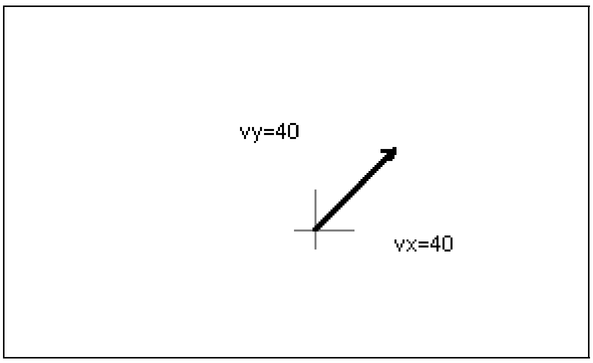
Assinala *vx* e *vy* como componentes horizontal e vertical do vetor.

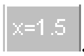


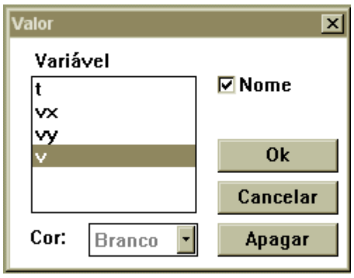
Escolha a cor desejada para o vetor.

Aumenta a espessura do vetor para dois pixéis.

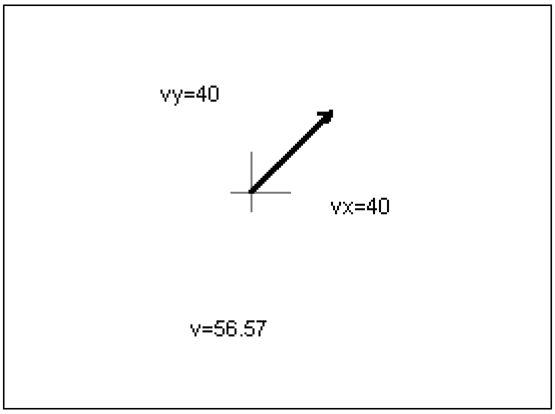
4. Posicione o vetor no meio da tela. A janela de **Animação** fica com o seguinte aspecto:



5. Vais agora representar a magnitude do vetor na **Animação**. Para tal, clica no botão . Depois assinala na caixa de diálogo que pretendes ver o valor de v (atenção à cor em que vai aparecer!):



6. A janela passa então a ter o seguinte aspecto:



7. A magnitude deste vetor é, pois, 56.57 unidades.

Um vetor com componentes variáveis

1. Apaga os valores atribuídos às componentes do vetor no modelo de modo a ficarem apenas os nomes *vx* e *vy:*

$$vx$$

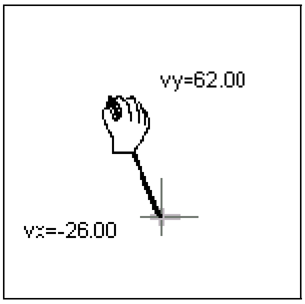
$$vy$$

$$v = \sqrt{\left(vx^2 + vy^2\right)}$$

2. Depois de clicares no botão **Interpretar**, surgem duas caixas, na janela **Condições Iniciais**, para atribuires valores. Atribui o valor 40 quer tanto para *vx* quanto para *vy.* Obténs, evidentemente, a mesma situação, mas…

3. Clica no botão *começar*, na janela de **Controlo**.

4. Com o *"mouse"*, modifica a posição da cabeça do vetor e observa como variam as componentes do vetor e a respectiva magnitude:



5. Quando se acabam as 20 unidades de tempo, que estão definidas por omissão na janela de **Controlo**, deixa de ser possível manipular o tamanho do vetor. Se necessitares de mais tempo para manipulares o vetor, modifica o máximo da variável independente *t* para, por exemplo, 200 unidades.

Um vetor com componentes dependentes do tempo

1. Acrescenta no modelo a seguinte expressão para *vx:*

$$vx = 5 \times t$$

$$vy$$

$$v = \sqrt{\left(vx^2 + vy^2\right)}$$

2. Quer dizer, neste modelo, a componente escalar do vetor segundo o eixo dos *xx* varia com *t:* para cada unidade de *t* que decorre, *vx* varia 5 unidades.

3. Executa o modelo e observa.

4. Procede de modo semelhante para fazer *vy* depender de *t,* de acordo com a seguinte expressão:

$$vx = 5 \times t$$

$$vy = 10 \times t$$

$$v = \sqrt{\left(vx^2 + vy^2\right)}$$

5. Observa a animação.

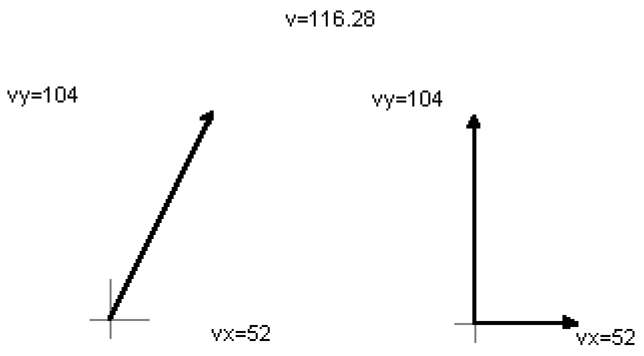
6. A direção do vetor varia? E o seu sentido? E a sua magnitude?

Observar as componentes e o vetor

Constrói o seguinte modelo.

$$vx = 5 \times t \qquad vy = 10 \times t \qquad v = \sqrt{\left(vx^2 + vy^2\right)}$$

No vetor do lado direito, em vez de se observar o vetor (na caixa de propriedades selecionou-se a representação **Componentes** em vez da opção **Vetor**, que está assinalada por omissão):



Um vetor cuja origem também depende do tempo

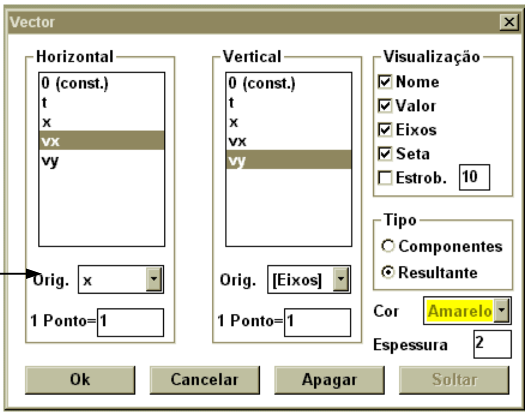
1. Escreve o seguinte modelo:

$$x = 10 \times t$$

$$vx = 20$$

$$vy = 20$$

2. Cria um vetor numa janela de animação com as seguintes características:



A origem, na horizontal, do vetor é variável e é determinada pela variável *x*.

3. Executa o modelo e observa. Que sucede à origem do vetor?

Experimenta

1. Calcula a magnitude dos vetores cujas componentes horizontais e verticais são, respectivamente:
   - 50 e 40 unidades;
   - 50 e – 40 unidades;
   - – 50 e 40 unidades;
   - – 50 e – 40 unidades.
2. Constrói um modelo em que um vetor com as componentes de 20 unidades e –50 unidades, segundo os eixos dos *xx* e dos *yy*, respectivamente, se desloca, para a esquerda, na horizontal, 5 unidades para cada unidade de *t.*
3. Constrói um modelo em que um vetor com a magnitude de 20 unidades, fazendo um ângulo de 45 graus com o eixo dos *xx,* se desloca, para a esquerda, na horizontal, 5 unidades para cada unidade de *t.*
4. Constrói um modelo em que um vetor com a magnitude de 20 unidades, fazendo um ângulo de 45 graus com o eixo dos *xx,* se desloca, para cima, na vertical, 5 unidades para cada unidade de *t.*
5. Constrói um modelo em que um vetor com a magnitude de 20 unidades, fazendo um ângulo de 45 graus com o eixo dos *xx,* se desloca, se desloca *na própria direção do vetor* (não exagerar na rapidez…)

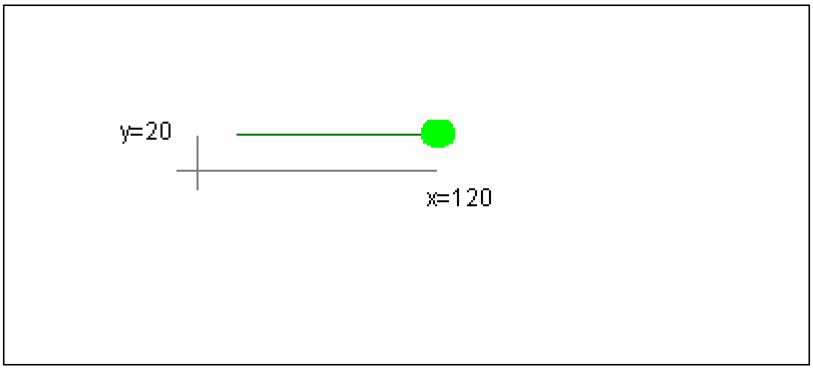
5. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DOS MOVIMENTOS

Nas atividades anteriores utilizaram-se equações *y(t)* e *x(t)*. A partir destas equações obtiveram-se figuras geométricas num plano *yOx* correspondentes às trajetórias de certos movimentos. Por exemplo, o modelo seguinte mostra como se pode traçar um segmento de reta entre os pontos de coordenadas (20, 20) e (120, 20):

$$y = 20$$

$$x = 20 + 5 \times t$$

Criando uma animação de uma bola que se move de acordo com estas equações, obténs, na janela **Animação**:



Nota que nas propriedades da bola verde se assinalou **Traject.** com um clic.

Em termos físicos, este modelo corresponde a um movimento com velocidade constante, de módulo 5 unidades, segundo uma direção paralela ao eixo dos *xx*, e dirigida no sentido positivo de *Ox*, a partir do ponto de coordenadas $x = 20$ e $y = 20$, durante 20 unidades de tempo.

As equações paramétricas utilizadas neste modelo são de grau 1. Vejamos o que acontece se utilizarmos uma equação paramétrica de grau 2.

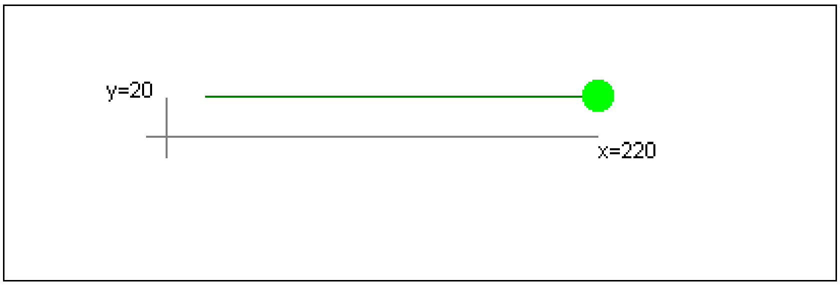
Um movimento acelerado numa direção paralela ao eixo dos *xx*

1. Escreve o seguinte modelo:

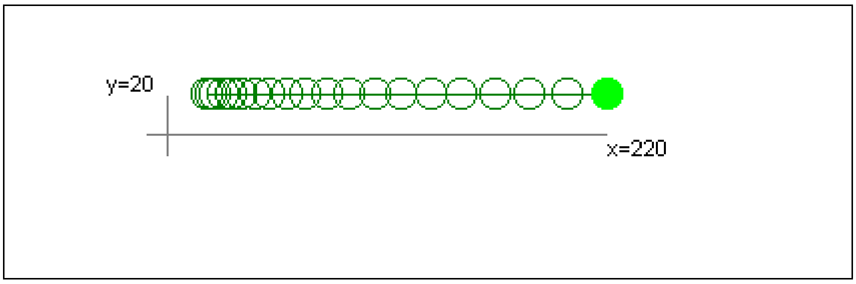
$$y = 20$$

$$x = 20 + 0.5 \times t^2$$

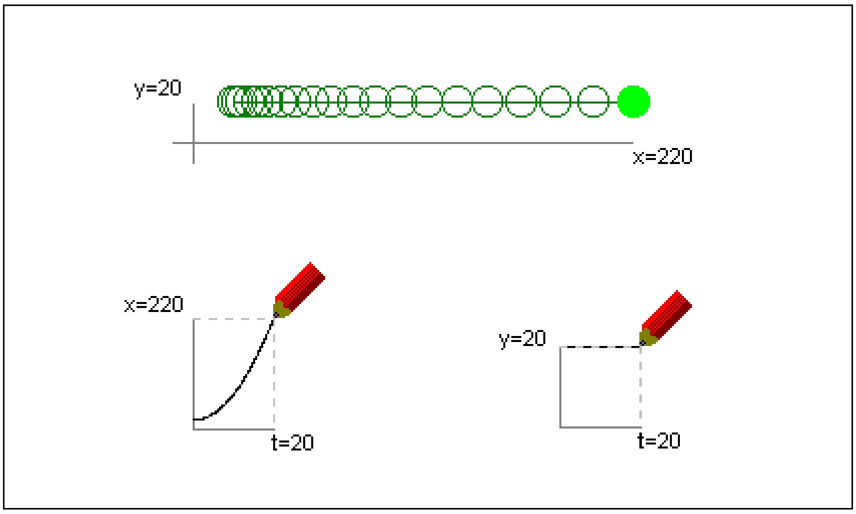
2. Cria uma animação semelhante à anterior. Depois de executares o modelo, obténs:



3. Se observares o movimento com atenção, verificas que a bola vai cada vez mais depressa. Para visualizar esse aumento de rapidez, pode se fazer um clic na **Estrob.**, na caixa de **Visualização** da bola:



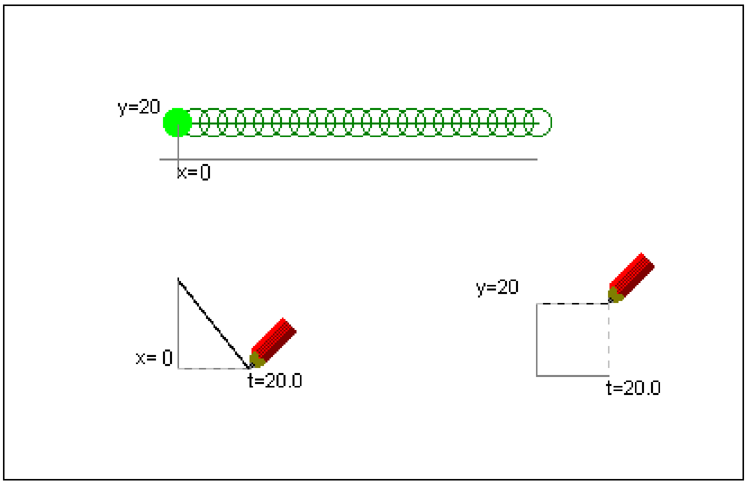
4. É muito importante não confundir a trajetória da bola com os gráficos das equações paramétricas. Na figura seguinte, estão representados esses gráficos, numa escala adequada (constrói esta animação):



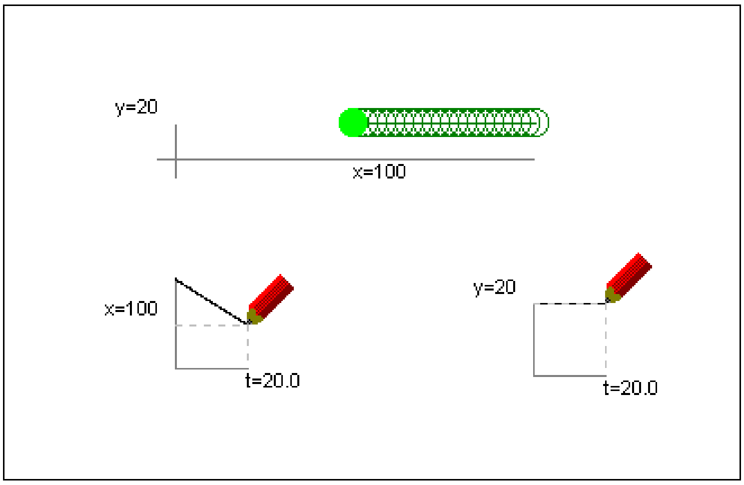
Experimenta

Constrói modelos (e escreve-os ao lado das figuras) que permitam obter as seguintes animações (em alguns casos é necessário *estimar* alguns valores…):

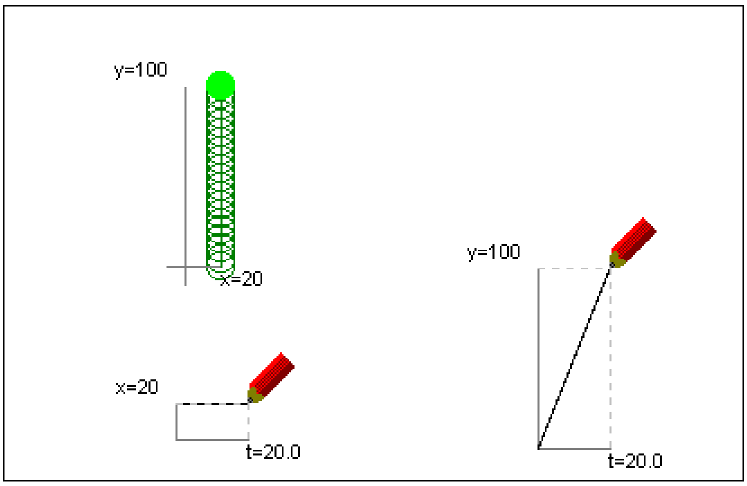
1.



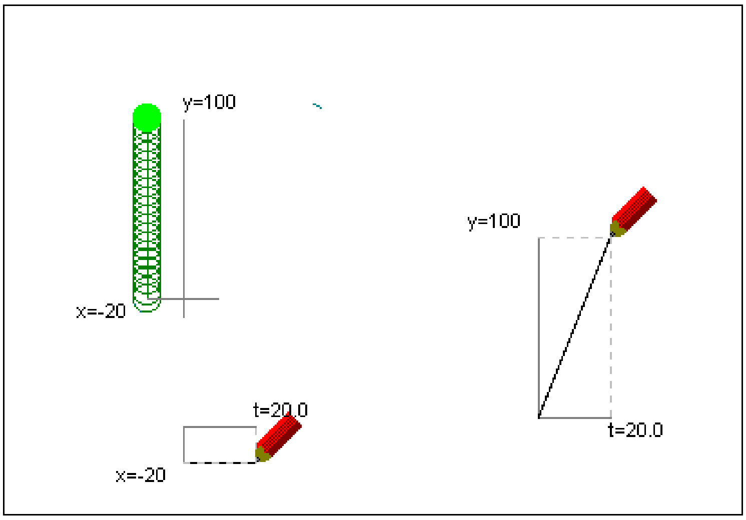
2.



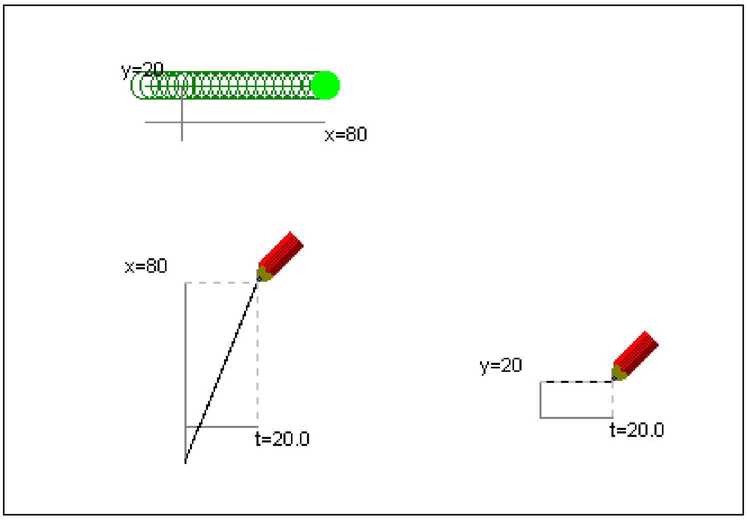
3.



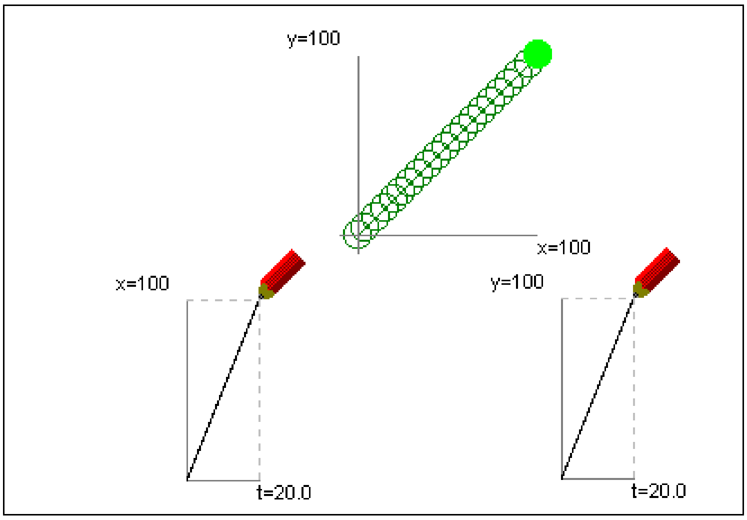
4.


y=100
x=-20
y=100
t=20.0
t=20.0
x=-20

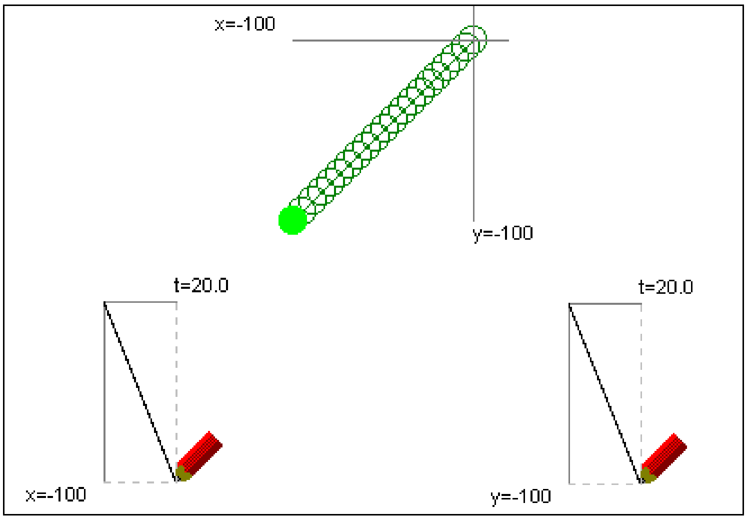
5.


y=20
x=80
x=80
t=20.0
y=20
t=20.0

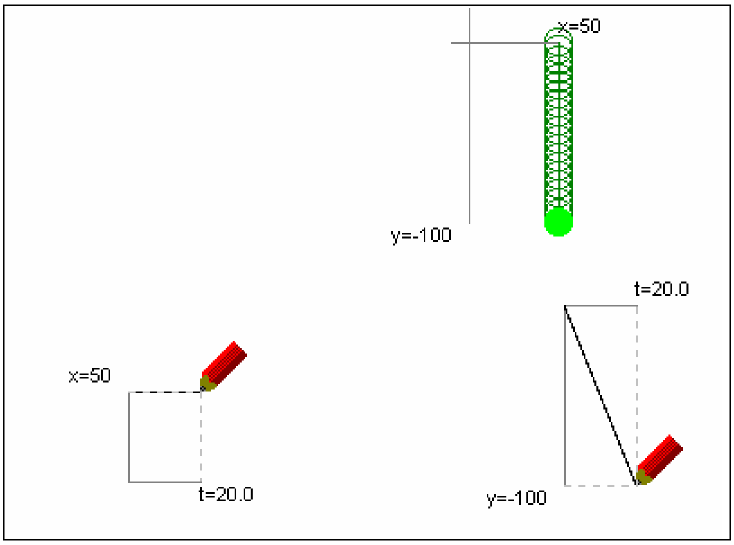
6.


y=100
x=100
x=100
y=100
t=20.0
t=20.0

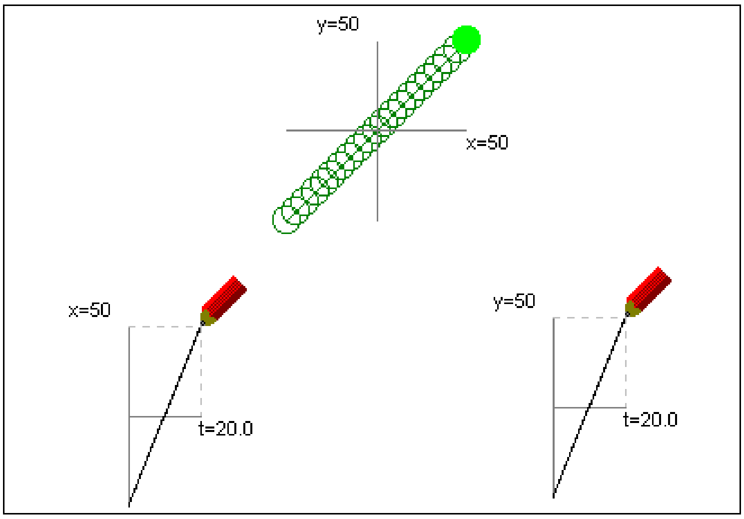
7.


x=-100
y=-100
t=20.0
x=-100
t=20.0
y=-100

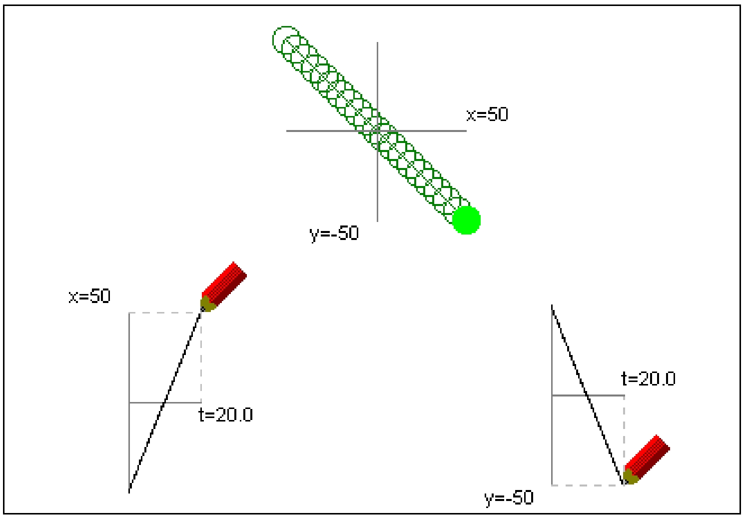
8.


x=50
y=-100
t=20.0
x=50
t=20.0
y=-100

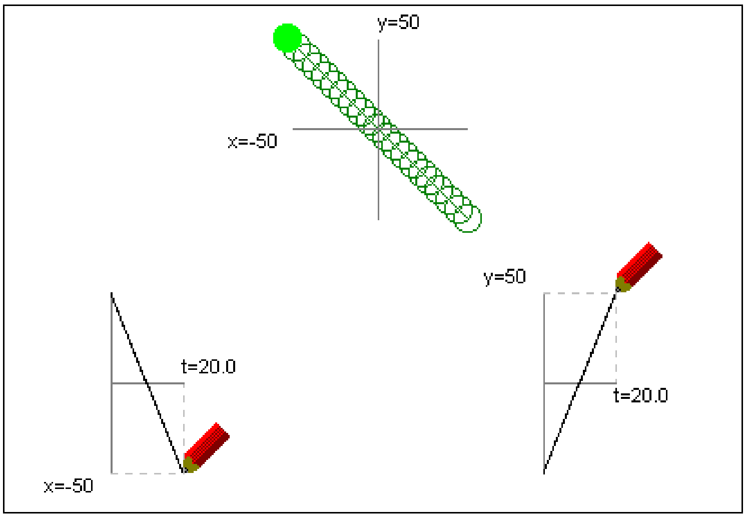
9.


y=50
x=50
x=50
t=20.0
y=50
t=20.0

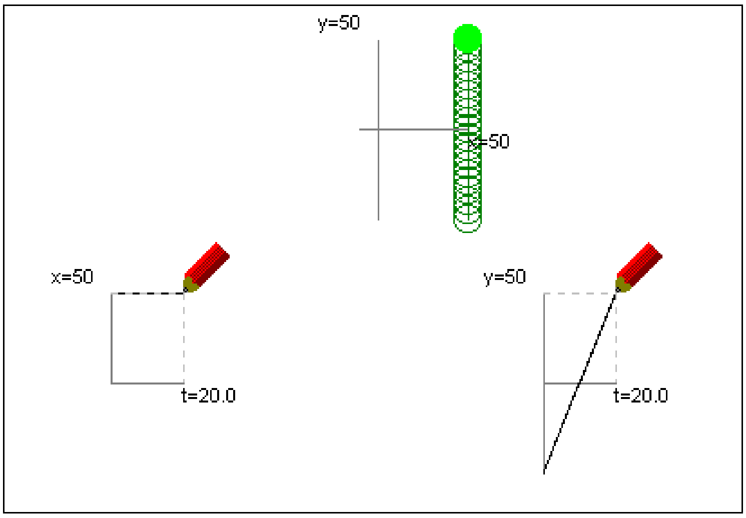
10.


x=50
y=-50
x=50
t=20.0
t=20.0
y=-50

11.


y=50
x=-50
y=50
t=20.0
t=20.0
x=-50

12.


y=50
x=50
y=50
t=20.0
t=20.0

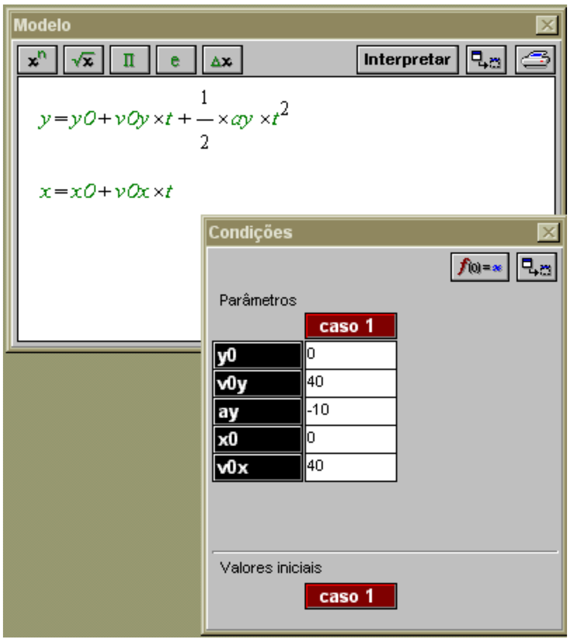
Equações paramétricas de um projétil

Vamos agora analisar as equações paramétricas do movimento de um projétil, considerando desprezível a resistência do ar.

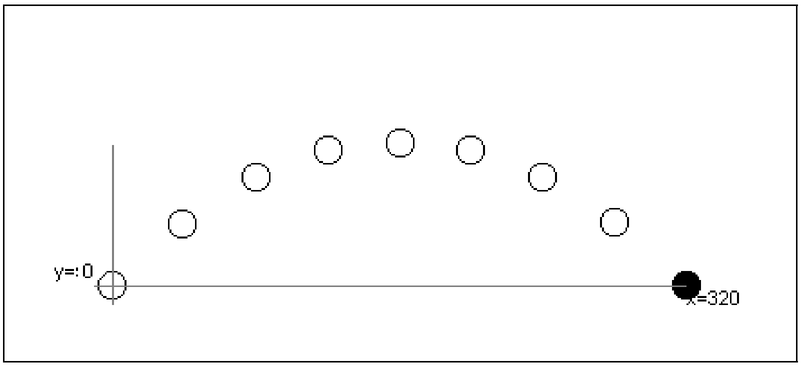
A aceleração de um projétil, nestas condições, apenas tem componente vertical, uma vez que a força gravitacional é a única que atua no projétil.

Como Galileu mostrou no século XVI, o movimento de um projétil pode ser considerado como a «soma» ou «composição» de dois movimentos: um *movimento vertical com aceleração constante* e um *movimento horizontal com velocidade constante*.

1. Escreve o seguinte modelo:

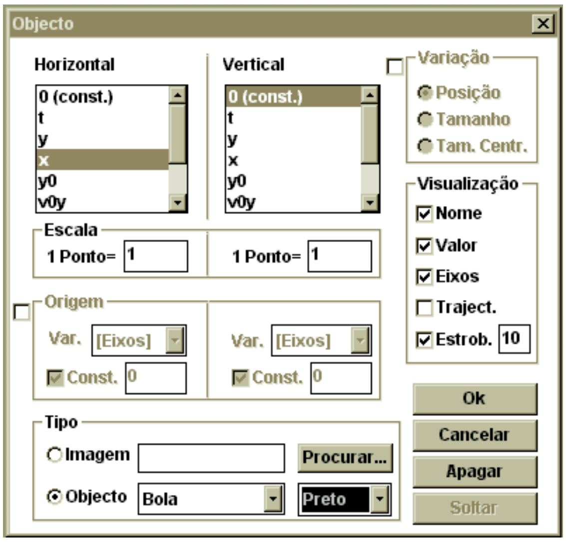


2. Cria uma animação com uma bola com as coordenadas x e y e executa o modelo durante 8 unidades de tempo (utiliza o botão **Opções…** da janela de **Controlo** para definir esse valor máximo para t):



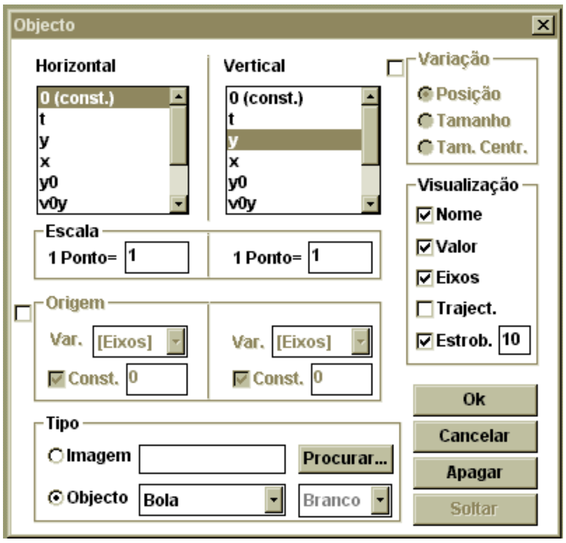
3. Vamos verificar que, de fato, este movimento pode ser considerado como a «soma» ou «composição» de dois movimentos: um com aceleração constante na vertical, dirigida para baixo, e outro com velocidade constante, na horizontal.

4. Cria uma nova bola, com uma cor diferente, e atribui-lhe apenas uma coordenada horizontal, *x:*



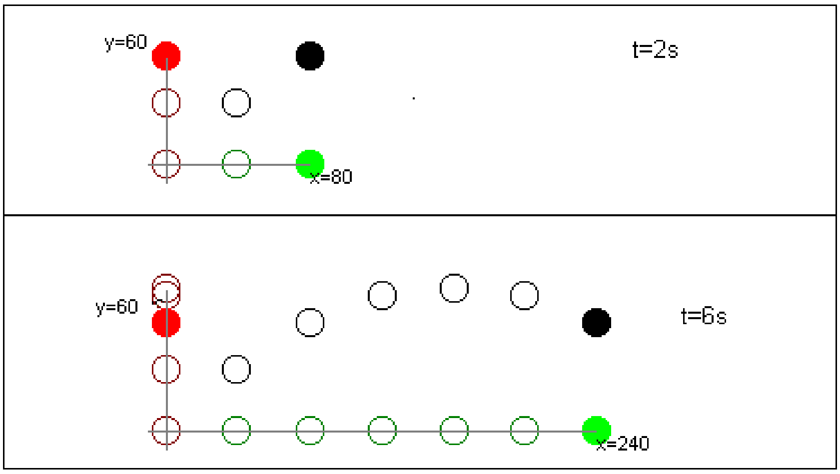
5. Coloca essa bola coincidente com a outra. Se o computador perguntar «**Quer prender a Bola Verde Claro (Objecto nº…)?**» responde **Não**.

6. Cria mais uma outra bola, com outra cor diferente, e atribui-lhe apenas uma coordenada vertical, *y:*



7. Coloca essa bola coincidente com as outras duas. Se o computador «**Quer prender a Bola Verde Claro (Objecto nº…)?**» responde **Não**.

8. Executa o modelo e observa:



9. Como podes observar, o movimento do projétil pode ser considerado como a composição dos dois movimentos: o movimento *horizontal*, com *velocidade constante*, e o movimento *vertical*, com uma certa *velocidade inicial dirigida para cima mas com aceleração dirigida para baixo*.

10. Neste movimento podemos considerar as equações paramétricas que descrevem o movimento do projétil, *x(t)* e *y(t)* e a equação da trajetória, que relaciona *y* com *x*. Para os dados utilizados, tem-se, para as equações paramétricas:

$$x = 40 \times t \qquad\qquad y = 40 \times t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

Eliminando a variável *t* nestas duas equações, obtém-se:

$$t = \frac{x}{40} \qquad\qquad y = 40 \times \frac{x}{40} - \frac{1}{2} \times 10 \times \left(\frac{x}{40}\right)^2$$

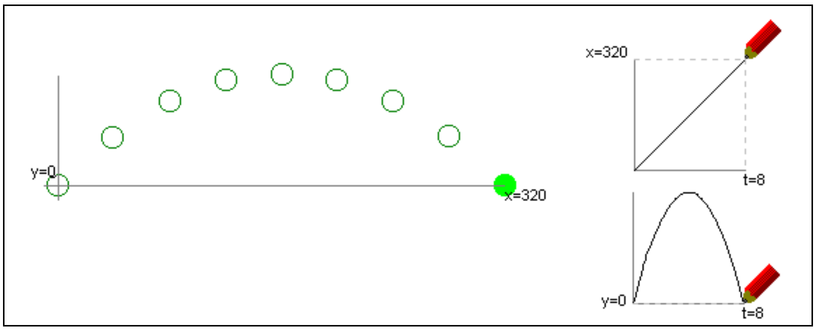
Simplificando, vem:

$$y = x - \frac{5}{1600} \times x^2$$

Esta é a *equação da trajetória* do projétil, que não deve ser confundida com as respectivas *equações paramétricas*. Podes facilmente verificar que esta equação descreve todos as posições do projétil.

Gráficos das equações paramétricas do projétil

1. Observa com atenção a seguinte animação, obtida com o modelo do movimento de um projétil que estamos analisando (se quiseres apagar algum dos objetos da animação, utiliza o botão direito do "*mouse*").



2. Constrói a animação anterior em fundo preto (Cuidado as escalas dos gráficos. Se o fundo for branco, cuidado, também, com as cores dos gráficos.).

3. A trajetória é sempre representada numa escala monométrica (quer dizer, a escala horizontal é igual à escala vertical), uma vez que não faz sentido considerar que o espaço é representado em escalas diferentes, na horizontal e na vertical. Já os gráficos das equações paramétricas *x(t)* e *y(t)* não necessitam de ser representados em escalas monométricas, como é o caso da animação anterior.

4. No modelo que estamos analisando, que ângulo faz a velocidade do projétil com a horizontal, no instante de lançamento? Como podes fundamentar essa resposta?

Como varia a velocidade no movimento de um projétil

1. Acrescenta no modelo anterior as equações que relacionam as componentes horizontal e vertical da velocidade do projétil com o tempo:

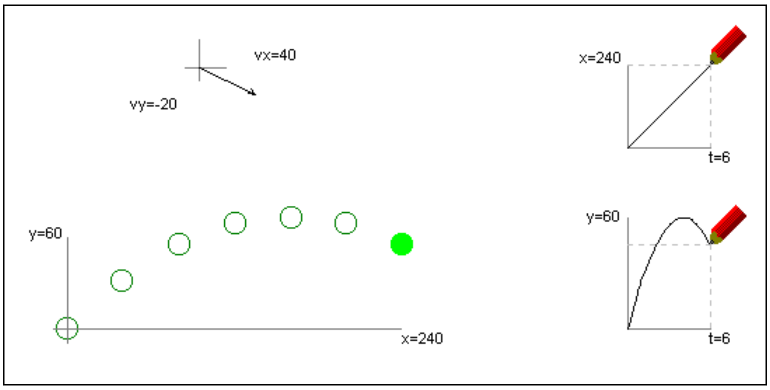
$$y = y0 + v0y \times t + \frac{1}{2} \times ay \times t^2$$

$$x = x0 + v0x \times t$$

$$vy = v0y + ay \times t$$

$$vx = v0x$$

2. Cria um vetor com componentes *vx* e *vy* e coloca-o numa zona livre da janela de animação:



3. Executa o modelo e observa como variam as componentes da velocidade. Qual das componentes se mantém constante?

4. Em que posição a velocidade tem a direção horizontal?

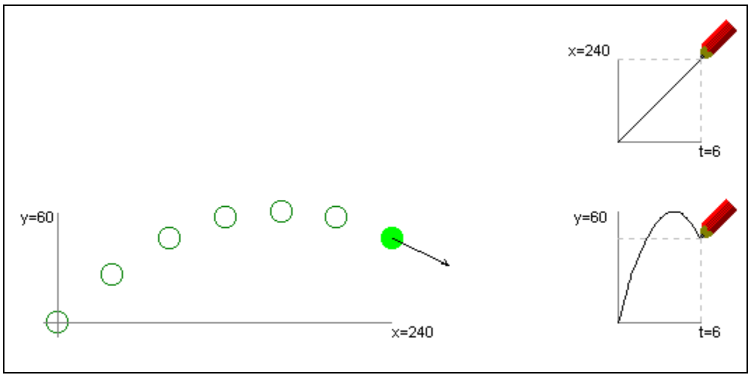
5. Esboça o gráfico de *vx* em função do tempo.

6. Esboça o gráfico de *vy* em função do tempo.

7. Edita as características do vetor que representa a velocidade e retira os atributos **Nome**, **Valor** e **Eixos**.

8. Pega no vetor e coloca-o sobre a bola verde, até aparecer um «nó». Prende esse vetor à bola verde.

9. Executa o modelo. Deves observar que o vetor velocidade se mantém ligado à bola:



10. Acrescenta no modelo um processo para calcular a magnitude da velocidade e na animação indica essa grandeza. Em que instante a magnitude da velocidade é mínima?

11. Caracteriza a velocidade no instante de lançamento (direção, componentes e magnitude).

12. Caracteriza a velocidade no instante em que o projétil volta a atingir o solo (direção, componentes e magnitude).

Modelo de um projétil lançado horizontalmente, de uma certa altura

1. Observa com atenção o seguinte modelo, adaptado a partir do anterior:

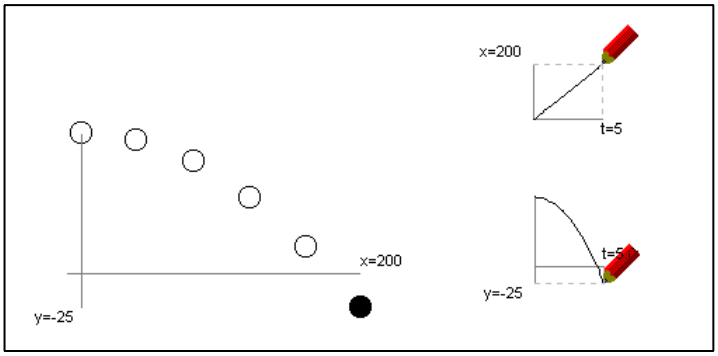
Modelo

$$y = y0 + v0y \times t + \frac{1}{2} \times ay \times t^2$$

$$x = x0 + v0x \times t$$

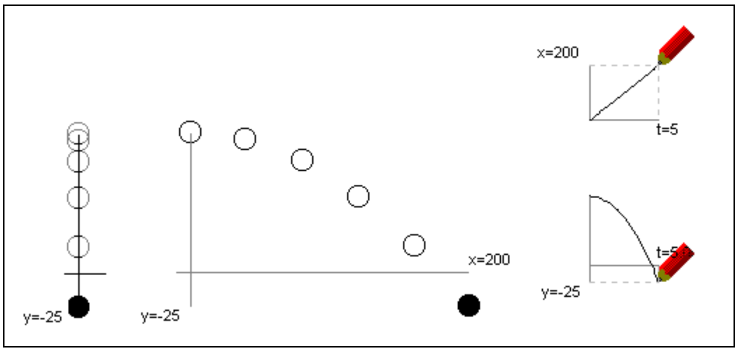
Condições Iniciais

$y0$	100
$v0y$	0
ay	-10
$x0$	0
$v0x$	40



2. Explica, tendo em conta as características do modelo, porque o lançamento foi horizontal.

3. Compara este movimento com o movimento de queda livre, da altura de 100m, obtendo uma animação como a seguinte. Que concluis?

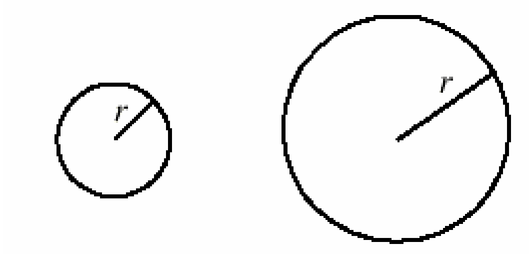


6. RADIANOS, GRAUS E ROTAÇÕES

Usualmente mede-se a amplitude de um ângulo em graus. No entanto, em muitas circunstâncias é mais adequado medir essa amplitude em radianos. Para compreender como se mede um ângulo em radianos, a unidade SI de ângulo, é útil recordar como se mede o perímetro de uma circunferência.

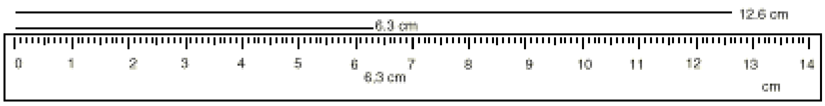
Como medir o perímetro de uma circunferência

Desenhemos duas circunferências num pedaço de cartão: uma de raio 1,0 cm e outra de raio 2,0 cm:



1,0 cm de raio 2,0 cm de raio

Vamos agora medir o perímetro destas duas circunferências. Com uma tesoura, cortamos as circunferências. Ajustamos um pedaço de linha de costurar a cada circunferência. A seguir, medimos o comprimento dessas linhas com uma régua:



Se medirmos o perímetro de outras circunferências, com raios de 3.0 cm, 4.0 cm, etc., concluímos que o perímetro é dado pela expressão seguinte:

perímetro da circunferência = 6.3 x raio

O valor 6.3 é, de certo modo, uma *constante de proporcionalidade* entre o raio *r* e o perímetro da circunferência, uma vez que estas duas grandezas são *diretamente* proporcionais.

O número 6.3 é, aproximadamente, o *dobro* do «número mais importante da geometria», Pi, que se representa pela letra grega π. O número π é um número irracional (não pode ser escrito na forma de fração ou razão entre dois outros números). O valor de π, com 500 casas decimais, é

π=3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459
230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460
955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493
038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692
346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152
092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194
151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237
996274956735188575272489122793818301194913

Com 4 e 2 casas decimais, é, respectivamente: π = 3.1416 e = 3.14.

A fórmula para calcular o perímetro de uma circunferência é, pois:

$$\text{perímetro} = 2\,\pi\, r$$

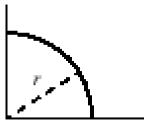
Graus e grados

Recordemos que um ângulo pode ser medido em graus e em grados, que não são unidades SI. Enquanto **1 grau** é a fração 1/90 de um ângulo reto, **1 grado** é a fração 1/100 também de um ângulo reto.

Radianos

A unidade SI de ângulo é o **radiano**. Vejamos como se define um radiano.

Consideremos um *ângulo reto* e um arco de raio *r*, cujo centro se encontra no vértice desse ângulo, compreendido entre os lados do ângulo:



O comprimento do arco de 90° é 1/4 do perímetro da circunferência de qual faz parte. Como o comprimento da circunferência é dado pelo produto $2\pi r$, podemos escrever que o comprimento do arco de 90° é:

$$\text{comprimento do arco de } 90^{o} = \frac{2\pi r}{4}$$

Podemos agora perguntar quantas vezes o comprimento deste arco é maior do que o respectivo raio *r.* Para determinar quantas vezes um certo valor é maior do que outro, podemos efetuar uma divisão:

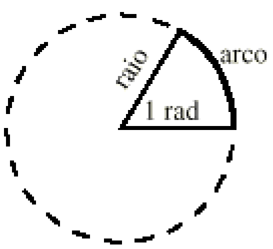
$$\frac{\text{comprimento do arco de } 90^{o}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{\frac{2\pi r}{4}}{r} = \frac{2\pi r}{4r} = \frac{\pi}{2} = \frac{3.1415}{2} = 1.57075$$

Como podemos concluir imediatamente, o **quociente** entre o comprimento de um arco e o comprimento do respectivo raio não depende do valor do raio. Para o caso do arco de 90°, esse quociente é *sempre* 1.57075.

Pode-se medir um ângulo em radianos dividindo o comprimento de um arco correspondente a esse ângulo pelo respectivo raio:

$$\text{medida de um ângulo em radianos} = \frac{\text{comprimento do arco correspondente ao ângulo}}{\text{comprimento do raio}}$$

A medida do ângulo reto em radianos é, pois, 1.57075 radianos.



Um **radiano** (1 rad) é, então, definido como a medida de um ângulo cujo arco compreendido entre os lados tem exatamente o comprimento do respectivo raio:

$$1 \text{ radiano} = \frac{\text{comprimento de um arco igual ao comprimento do raio}}{\text{comprimento do raio}}$$

Um radiano corresponde aproximadamente a 57°. Vejamos porquê.

O comprimento de uma circunferência, a qual corresponde o ângulo de 360°, é $2\pi r$. Podemos, assim, afirmar que o ângulo de 360° é, em radianos:

$$
\begin{aligned}
\text{ângulo de 360º em radianos} &= \frac{\text{comprimento de uma circunferência}}{\text{comprimento do raio}} \\
&= \frac{2\pi r}{r}\ \text{rad} \\
&= 2\pi\ \text{rad} \\
&= 6.283\ \text{rad}
\end{aligned}
$$

Portanto, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{360°}{6.283\ \text{rad}} = \frac{x}{1\ \text{rad}}$$

Conclui-se desta proporção que:

$$x = 57.3\ °$$

Calcular…

1. Calcular, em radianos, as medidas dos seguintes ângulos:

1.1 30° **1.2** 45° **1.3** 60° **1.4** 120° **1.5** 180° **1.6** 300°

2. Calcular, em graus, as medidas dos seguintes ângulos:

2.1 1.2 rad **2.2** π /4 rad **2.3** 2.3 rad

2.4 π rad **2.5** 3π/2 rad **2.6** 0.5 rad

Um modelo para converter graus em radianos…

É relativamente fácil utilizar o *Modellus* como «máquina de calcular». O modelo seguinte mostra como se pode converter graus em radianos, utilizando o *Modellus* apenas como «máquina de calcular» (para escrever π, utiliza-se o botão Π do topo da janela **Modelo**):

Atenção, não colocar espaços entre palavras; utilizar letras maiúsculas para indicar uma nova palavra ...no nome das variáveis.

Se o fundo for branco, ao incluir o valor da variável, trocar sua cor.

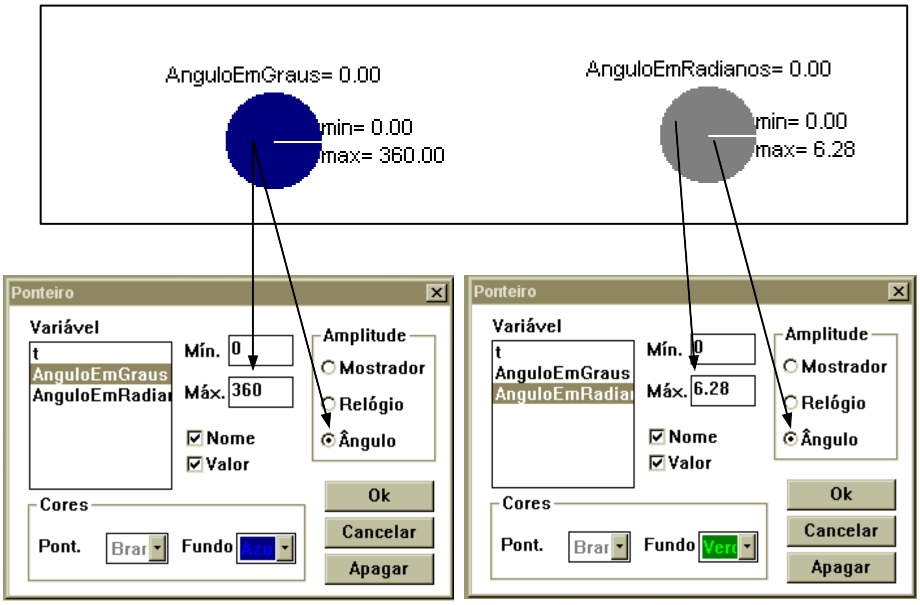
Ângulo em graus e em radianos

1. Constrói o seguinte modelo. (Nota que não se pode utilizar espaços nos nomes das variáveis.)

$$AnguloEmGraus = 5 \times t$$

$$AnguloEmRadianos = AnguloEmGraus \times 2 \times \frac{\Pi}{360}$$

Utilizando dois «medidores analógicos» (ícone  na janela de animação), ao final de 12.5 unidades de tempo, tua animação se parecerá com o seguinte:



2. Quanto tempo demora uma volta completa?

3. Qual é a rapidez da rotação, em graus por segundo?

4. Qual é a rapidez da rotação, em radianos por segundo?

5. Qual é o sentido positivo da rotação?

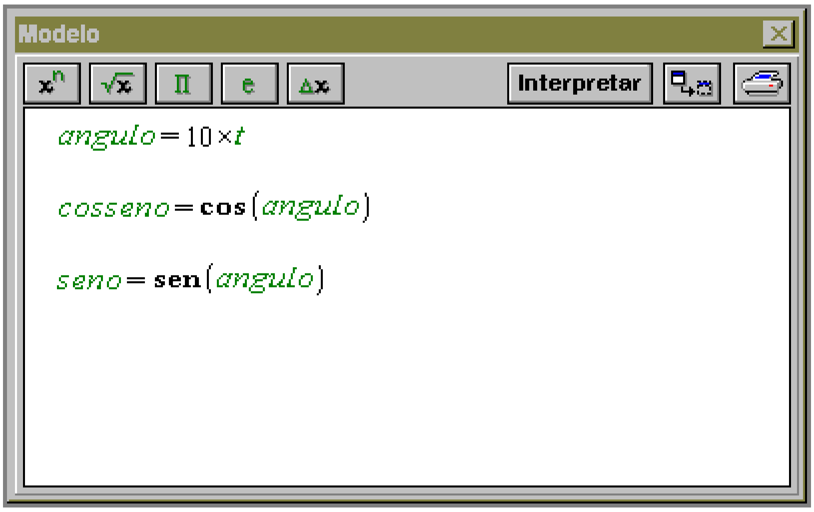
6. Qual é o ângulo que se considera como ângulo nulo?

7. ROTAÇÃO, SENO DE UM ÂNGULO E CO-SENO DE UM ÂNGULO

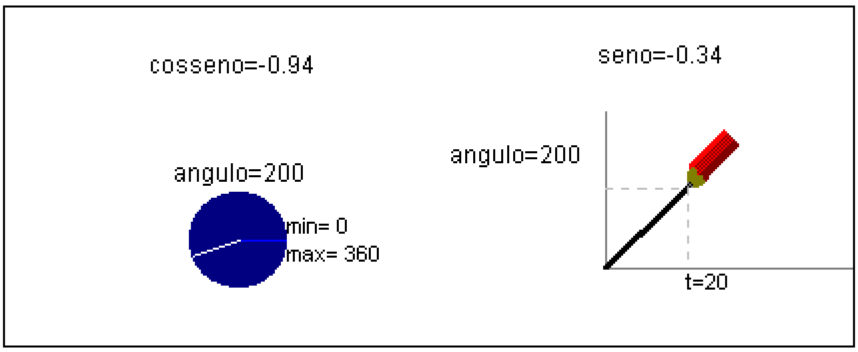
Vais agora investigar um conjunto de modelos matemáticos que têm inúmeras aplicações nas ciências e nas engenharias.

Ângulo em rotação, seno e co-seno do ângulo

1. Constrói o seguinte modelo:



2. Cria na janela de animação o seguinte:



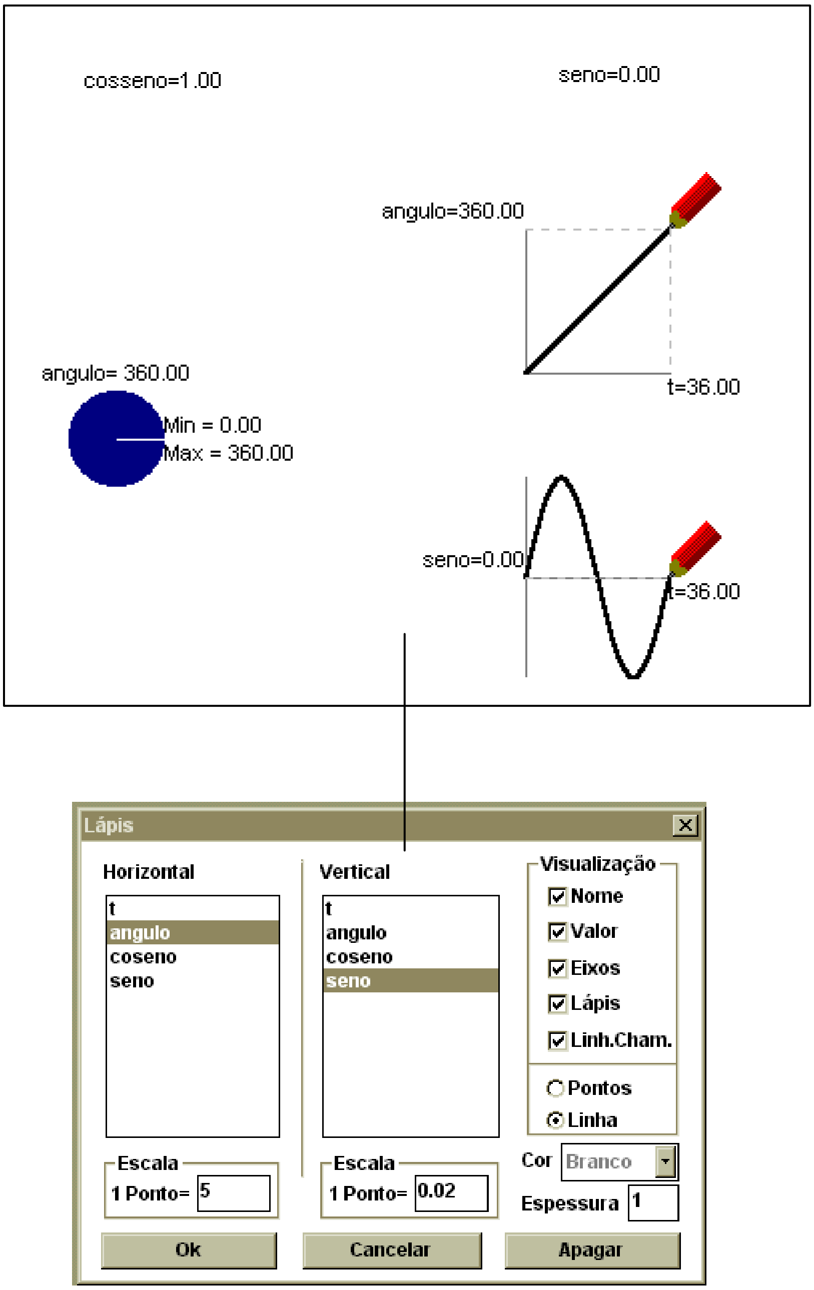
3. Com que rapidez varia o ângulo?

4. Tendo em conta a resposta à questão anterior, modifica o valor máximo de *t* na janela de **Controlo** de modo a observares uma rotação completa.

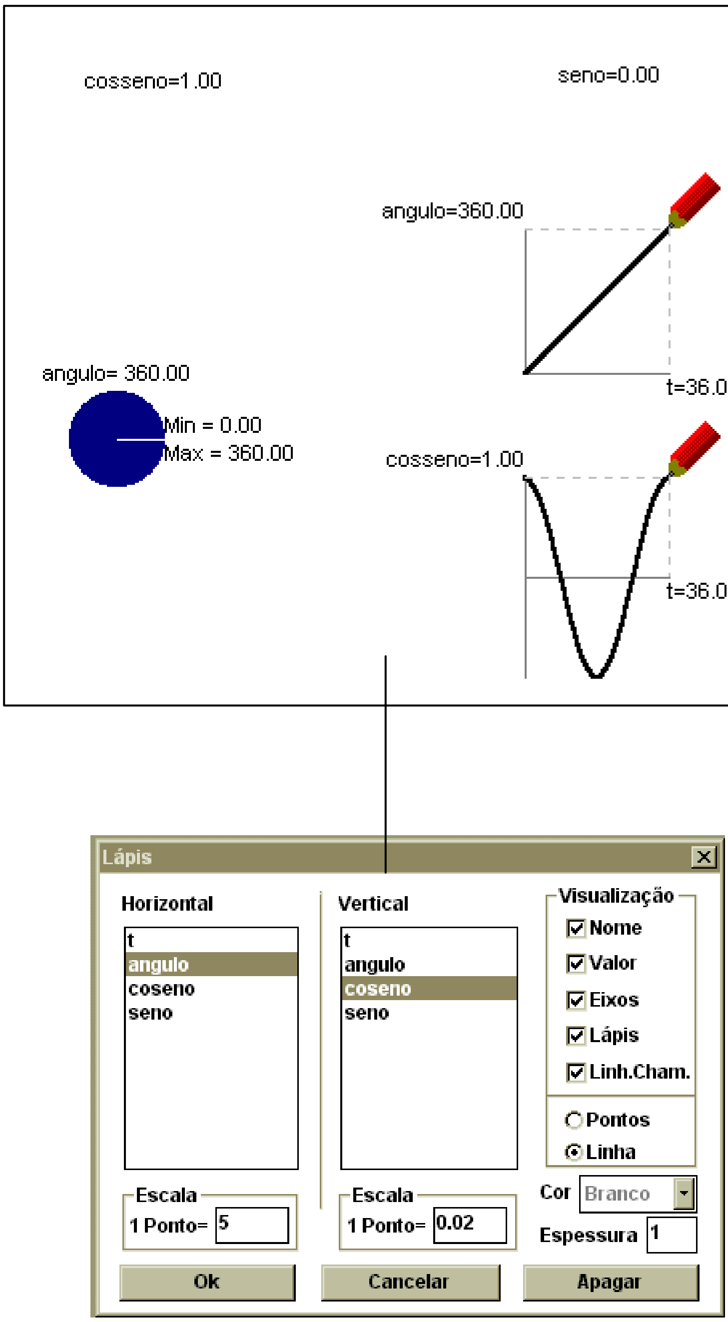
5. No decorrer de uma rotação completa, qual é o valor máximo do seno do ângulo? E o valor mínimo? A que ângulos correspondem esses valores?

6. No decorrer de uma rotação completa, qual é o valor máximo do co-seno do ângulo? E o valor mínimo? A que ângulos correspondem esses valores?

7. Acrescenta na animação anterior um gráfico do *coseno* em função do *angulo* e verifica se respondeste corretamente à questão 5.



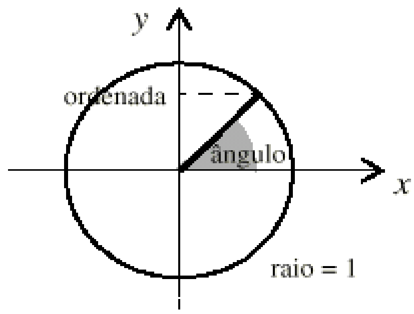
8. Substitui na animação anterior o gráfico do *seno* em função do *angulo* pelo gráfico do co-*seno* em função do *angulo* e verifica se respondeste corretamente à questão 6.



Função seno: uma definição

A função **seno** pode ser definida como a relação entre a **ordenada** de um raio em rotação com rapidez constante e o ângulo (sendo o comprimento do raio igual à unidade).

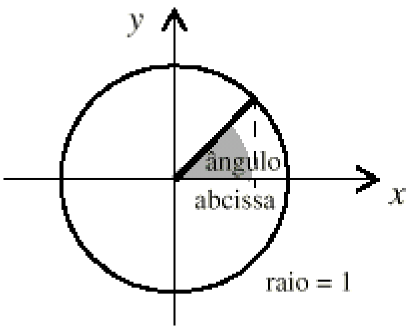
Relaciona esta definição com a animação em *Modellus*. Repara que a ordenada só pode tomar valores entre –1 e +1 e que é nula quando o ângulo é nulo e quando o ângulo é igual a 180º.



Utilizando os dados da janela de animação, completa o seguinte quadro:

ângulo (em graus)	seno do ângulo	ângulo (em graus)	seno do ângulo
0		210	
30		240	
60		270	
90		300	
120-		330	
150		360	
180			

Função co-seno: uma definição



A função **co-seno** pode ser definida como a relação entre a **abcissa** de um raio em rotação com rapidez constante e o ângulo (sendo o comprimento do raio igual à unidade).

Relaciona esta definição com a animação em *Modellus*. Repara que a abcissa só pode tomar valores entre –1 e +1 e que é nula quando o ângulo é 90º e quando o ângulo é 270º.

Utilizando os dados da janela de animação, completa o seguinte quadro:

ângulo (em graus)	co-seno do ângulo	ângulo (em graus)	co-seno do ângulo
0		210	
30		240	
60		270	
90		300	
120-		330	
150		360	
180			