

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
APLICADA

ÍNDICES DE GRAFOS LIVRES DE $K_{s,t}$

LILIAN CAVALET

PORTO ALEGRE

2018

LILIAN CAVALET

ÍNDICES DE GRAFOS LIVRES DE $K_{s,t}$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como exigência parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Emílio Allem

PORTO ALEGRE

2018

CIP - Catalogação na Publicação

Cavalet, Lilian
Índices de grafos livres de $K_{s,t}$ / Lilian
Cavalet. -- 2018.
123 f.
Orientador: Luiz Emílio Allem.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre,
BR-RS, 2018.

1. Problema de Zarankiewicz. 2. Teoria extremal
de grafos. 3. Teoria espectral de grafos. 4.
Problema do tipo de Turán. I. Allem, Luiz Emílio,
orient. II. Título.

Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada

Índices de grafos livres de $K_{s,t}$
Lilian Cavalet

Banca examinadora:

Prof.^a Dr.^a Maria Aguiéiras Alvarez
de Freitas
COPPE - UFRJ

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
PPGMAp - UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Orsini Braga
DMPA - UFRGS

Dedico esse trabalho ao meu avô (in memoriam) e aos meus pais com todo meu amor e gratidão por tudo que fizeram por mim ao longo da minha vida.

Agradecimentos

A esta universidade e ao Instituto de Matemática e Estatística por disponibilizarem a infraestrutura necessária para a minha formação acadêmica.

As entidades que suportaram meus anos iniciais como bolsista de iniciação científica, em especial ao CNPq, por me apoiar financeiramente durante o mestrado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Emílio Allem, pelo tempo investido no auxílio ao desenvolvimento desta pesquisa, pelas suas correções e incentivos.

A Prof.^a Dr.^a Maria A. A. de Freitas, ao Prof. Dr. Vilmar Trevisan, e ao Prof. Dr. Rodrigo O. Braga, por aceitarem o convite para avaliação deste trabalho, pelo tempo investido na correção do mesmo, e por me inspirarem a ser uma melhor profissional.

Aos professores presentes durante a minha formação como matemática, e aos que participaram no período de mestrado. Aos que contribuíram no meu desenvolvimento como pesquisadora, despertando em mim a necessidade de buscar soluções para os problemas do cotidiano. Aos que me mostraram a real face da Matemática, aquela que não vemos na escola, mas que justifica a premissa de que “A Matemática é a mãe de todas as ciências”, e aos que mostraram que a Matemática e a tecnologia podem ser aliadas.

Aos meus pais, pelo apoio e incentivo nas horas difíceis, por estarem sempre presentes e pelo amor incondicional. Aos meus amigos, especialmente aos que, apesar do pouco tempo de amizade, tornaram-se muito importantes na minha vida. Ao Alan e à Taíssa pela companhia e pelos conselhos nos momentos difíceis, pelas conversas inspiradoras, pelos momentos de risadas e diversão e pelo apoio desde o momento em que os conheci.

“Sometimes you need to keep going even in the face of doubt.”
(Cassie Nightingale - The Good Witch)

Resumo

O problema de Turán, assim como seu derivado, o problema de Zarankiewicz, pertencem à área de teoria extremal de grafos, e são problemas em aberto. Na década de 90, houve o passo inicial ao que alguns autores chamam de teoria espectral extremal, que ocorre ao solucionar problemas extremais com o auxílio da teoria espectral de grafos. Motivados por tal expansão, apresentamos algumas cotas retiradas da literatura associadas ao problema de Zarankiewicz e às matrizes de adjacência, Laplaciana e Laplaciana sem sinal, juntamente com o passo a passo de suas demonstrações. Visamos fortalecer nosso “background” para uma futura interpretação do problema de Zarankiewicz associado à matriz Laplaciana normalizada, que se encontra em aberto. Por fim, apresentamos comentários e limitantes superiores ao número de arestas associadas aos resultados indicados acima. Indicamos, também, que trabalhos futuros pretendemos estudar.

Palavras-chave: Problema de Zarankiewicz. Índice. Matriz de adjacência. Matriz Laplaciana. Matriz Laplaciana sem sinal. Matriz Laplaciana normalizada.

Abstract

The Turán problem, as well as its derivative, the Zarankiewicz problem, belong to the extremal graph theory and are open problems. In the 90's started what some authors call the spectral extremal graph theory, which occurs by solving extremal problems with the aid of the spectral graph theory. Motivated by such expansion, we present some bounds, taken from the literature, associated with the Zarankiewicz problem and the adjacency, Laplacian, and signless Laplacian matrices, along with step-by-step demonstrations of each. Our aim is to strengthen our background for a future interpretation of the Zarankiewicz problem associated with the normalized Laplacian matrix, which also remains open. Finally, we comment on the results and present upper bounds for the number of edge associated with the results above. We also indicate what should be addressed by future studies.

Keywords: Zarankiewicz problem. Index. Adjacency matrix. Laplacian matrix. Signless Laplacian matrix. Normalized Laplacian matrix.

Résumé

Le problème de Turán, ainsi que son dérivé, le problème de Zarankiewicz, appartiennent à la théorie des graphes extrémaux et sont des problèmes ouverts. Les années 90 ont vu, le début de ce que certains auteurs appellent la théorie spectrale des graphes extrémaux, qui se produit en résolvant des problèmes extrémaux avec l'aide de la théorie spectrale des graphes. Motivés par cette expansion, nous présentons certaines limites retirées de la littérature pour le problème de Zarankiewicz associé aux matrices d'adjacence, Laplacienne et Laplacienne sans signe, accompagnées des démarches de leurs démonstrations. Notre objectif est de renforcer notre formation pour une future interprétation du problème de Zarankiewicz associé à la matrice Laplacienne normalisée, qui reste ouverte. Finalement, nous commentons les résultats et nous présentons les limites supérieures pour le nombre d'arêtes associées aux résultats obtenus par le moyen indiqué ci-dessus. Nous suggérons également des sujets d'études futures.

Mots-clés : Problème du Zarankiewicz. Indice. Matrice d'adjacence. Matrice Laplacienne. Matrice Laplacienne sans signe. Matrice Laplacienne normalisée.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação das sete pontes de Königsberg destacando o rio Pregel. .	32
Figura 2 – Grafo \mathcal{G}	32
Figura 3 – Grafo complementar $\overline{\mathcal{G}}$	33
Figura 4 – $\mathcal{G} - v_1$	33
Figura 5 – $K_1 \vee \mathcal{G}$	33
Figura 6 – Subgrafo de \mathcal{G}	34
Figura 7 – $\mathcal{G}[S]$ subgrafo induzido por $S = \{v_4\}$	34
Figura 8 – Grafo completo K_4	34
Figura 9 – Grafo bipartido completo $K_{2,2}$	35
Figura 10 – Grafo 2-regular	36
Figura 11 – $srg(5, 2, 0, 1)$	36
Figura 12 – Clique	36
Figura 13 – Grafo de Turán $T(6, 3)$	48

Lista de tabelas

Tabela 1 – Ocorrência de justicidade para (2.7) e (2.8).	56
Tabela 2 – Cotas propostas para os índices de A , L e Q reescritas de forma que limitam superiormente o número de Turán.	94

Lista de símbolos

G	Grafo
V	Conjunto dos vértices de G
E	Conjunto das arestas de G
$ X $	Cardinalidade do conjunto X
$e(G)$	Número de arestas em G
$\{v_i, v_j\}$	Aresta formada pelos vértices v_i e v_j
$v_i \sim v_j$	v_i vizinho a v_j
$\Gamma(v_i)$	Vizinhança de v_i
\bar{G}	Grafo complementar
$G - V'$	Remoção do subconjunto V' de vértices de G
$G_1 \vee G_2$	“Join”/Junção
K_1	Grafo com vértice único
$G[S]$	Grafo induzido pelo conjunto S
V_S	Conjunto dos vértices de um grafo induzido por S
E_S	Conjunto das arestas de um grafo induzido por S
e_S	Número de arestas em um grafo induzido por S
K_n	Grafo completo com n vértices
$K_{s,t}$	Grafo bipartido completo com s e t vértices nas respectivas partições
S_n	Grafo estrela
$d(v_i)$	Grau do vértice v_i
$d(v_i, v_j)$	Número de vizinhos em comum entre v_i e v_j
$\delta(G)$	Grau mínimo de G
$\Delta(G)$	Grau máximo de G
$\bar{d}(G)$	Grau médio de G

$vol(G)$	Volume de G
$vol_k(G)$	k -volume de G
srg	Grafo fortemente regular
$\omega(G)$	Número de clique de G
C_n	Ciclo de tamanho n
$\chi(G)$	Número cromático de G
$D(G)$	Matriz diagonal de G
$d_{i,j}$	Entrada da matriz $D(G)$ associada a linha i e coluna j
$A(G)$	Matriz de adjacência de G
$a_{i,j}$	Entrada da matriz $A(G)$ associada a linha i e coluna j
$L(G)$	Matriz Laplaciana de G
$l_{i,j}$	Entrada da matriz $L(G)$ associada a linha i e coluna j
$Q(G)$	Matriz Laplaciana sem sinal de G
$q_{i,j}$	Entrada da matriz $Q(G)$ associada a linha i e coluna j
$\mathcal{L}(G)$	Matriz Laplaciana normalizada de G
$l_{i,j}$	Entrada da matriz $\mathcal{L}(G)$ associada a linha i e coluna j
M	Matriz qualquer
$m_{i,j}$	Entrada da matriz M associada a linha i e coluna j
$\lambda_i(M)$	i -ésimo autovalor de M
$\lambda_1(M)$	Maior autovalor de M
$\lambda(A)$	Índice da matriz A
$\lambda(L)$	Índice da matriz L
$\lambda(Q)$	Índice da matriz Q
$\lambda(\mathcal{L})$	Índice da matriz \mathcal{L}
\mathbf{x}	Vetor
$\mathbf{1}$	Autovetor de uns

$ex(G, H)$	Número de Turán
$T(n, t)$	Grafo de Turán
$J_{s,t}$	Matriz com entradas unitárias e de tamanho $s \times t$
$z(m, n, s, t)$	Número de Zarankiewicz
$G(X, Y, E)$	Grafo bipartido com partição X e Y
$a(\Delta, t)$	Número mínimo de arestas em um grafo de ordem Δ que não possui conjunto independente t
\mathcal{A}	Matriz binária de ordem $m \times n$
$\alpha_{i,j}$	Entrada da matriz \mathcal{A} associada a linha i e coluna j
$\mathcal{A}[I, J]$	Matriz formada pelo conjunto I de linhas e J de colunas
$\ \mathcal{A}\ $	Norma p , com $p = 1$
$\ \mathbf{x}\ $	Norma vetorial
$\hat{E}(X, Y)$	Conjunto das arestas $\{x, y\}$ com $x \in X \subset V$ e $y \in Y \subset V$
$\hat{e}(X, Y)$	Número de arestas em $\hat{E}(X, Y)$

Sumário

	INTRODUÇÃO	27
1	PRELIMINARES	31
1.1	Teoria de grafos: Notação, definições e resultados	31
1.2	Teoria espectral de grafos: Notação, definições e resultados	37
1.3	Teoria extremal de grafos: Notação, definições e resultados	46
2	COTAS ASSOCIADAS AOS PROBLEMAS DE TURÁN	51
3	COTAS ESPECTRAIS ABORDADAS	59
3.1	Resultados para matriz de adjacência	59
3.2	Resultados para matriz Laplaciana	61
3.3	Resultados para matriz Laplaciana sem sinal	62
3.4	Resultados para matriz Laplaciana normalizada	63
4	DEMONSTRAÇÕES DAS COTAS ESPECTRAIS ABORDADAS	67
4.1	Demonstração para o Teorema 3.1.2	67
4.2	Demonstração para o Teorema 3.1.3	71
4.3	Demonstração para o Teorema 3.1.5	74
4.4	Demonstração para o Teorema 3.2.1	77
4.5	Demonstração da Proposição 3.3.1	79
4.6	Demonstração para o Teorema 3.3.3	83
4.7	Demonstração para o Corolário 3.4.1	90
4.8	Demonstração para o Corolário 3.4.2	91
	CONCLUSÃO	93
	REFERÊNCIAS	97
	APÊNDICES	103
	APÊNDICE A – ÁLGEBRA LINEAR	105
A.1	Definições e proposições	105
A.2	Teoremas	106

	APÊNDICE B – COMBINATÓRIA	109
B.1	Propriedades	109
	APÊNDICE C – “A SPECTRAL TURÁN THEOREM” . .	111
C.1	Definições	111
C.2	Lemas	111

Introdução

A origem da teoria de grafos é humilde comparada a muitos ramos da Matemática, como o cálculo e a análise. Os problemas que levaram ao seu desenvolvimento eram, muitas vezes, desenhados para testar a ingenuidade em vez de estimular o intelecto. Tais “charadas”, de aparente trivialidade, capturaram o interesse dos matemáticos, que as tornaram um assunto rico em resultados teóricos, de uma surpreendente variedade e profundidade (BIGGS; LLOYD; WILSON, 1976). Tais desafios são caracterizados como problemas de otimização. Esses problemas podem ser o número máximo de cores necessárias para preencher um mapa sem que existam dois estados vizinhos com a mesma coloração; a busca pela menor rota entre um conjunto de cidades; a convocação dos alunos com melhores resultados nas universidades, entre tantas outras questões que surgem no dia-a-dia.

Um dos primeiros resultados publicados na área buscava o melhor caminho a ser percorrido entre as sete pontes existentes na cidade de Königsberg (BIGGS; LLOYD; WILSON, 1976). Sua solução foi apresentada por Leonhard Euler no século XVIII, sendo o marco para a consolidação dos pilares da teoria de grafos.

Nesta época surge a definição de grafo como um par ordenado composto por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas, cuja representação gráfica é dada por pontos e traços, respectivamente. Tais arestas/traços podem ser orientadas, indicando quando um vértice está ou não conectado a outro. Quando se suprime a orientação, diz-se que tal grafo é um grafo simples, ou não orientado.

No século XX, com a tese de doutorado de Cvetković (1971), é estabelecida uma nova área na teoria de grafos: a teoria espectral de grafos. Esta busca obter informações relevantes sobre o grafo, como: as relações de adjacência entre seus vértices; suas invariantes; e suas propriedades estruturais, por meio da interpretação do espectro de matrizes associadas a ele.

No mesmo século, Turán (1941) demonstra a seguinte questão: qual é o número máximo de arestas em um grafo com n vértices que não possui como subgrafo um grafo completo com t arestas? Tal resultado deu origem a uma nova linha de pesquisa em teoria dos grafos, denominada de teoria extremal de grafos. Essa teoria possui duas linhas recentes de investigação. A primeira melhora resultados clássicos associados ao problema de Turán, cujo principal progresso é ao longo das seguintes diretrizes: substituição de parâmetros fixos por variáveis; condições explícitas para a validade das declarações; desenvolvimento e uso de ferramentas de alcance geral. A segunda, chamada de teoria espectral extremal de grafos - termo usado em (HE; JIN; ZHANG, 2013; NIKIFOROV, 2011), procura conexões entre as propriedades extremas do grafo e os autovalores de certas matrizes associadas a

ele. Neste projeto manteremos o foco em tal interpretação, contudo não negligenciaremos a teoria extremal que a originou, como é possível ver na revisão histórica de cotas voltada a tais linhas de investigação.

Ao explorar a teoria extremal de grafos, nos direcionaremos ao problema de Zarankiewicz, proposto pelo matemático polonês Kazimierz [Zarankiewicz \(1951\)](#), que busca saber qual o maior número possível de arestas em um grafo bipartido, que não possui como subgrafo um grafo bipartido completo $K_{s,t}$. Nesta dissertação, buscamos abordá-lo em sua forma clássica e sob uma ótica espectral, uma vez que o problema encontra-se em aberto.

Primeiramente, revisitaremos o problema de Turán como motivação e introdução ao problema de Zarankiewicz. O abordaremos considerando grafos simples com n vértices excluindo um grafo completo K_t ou bipartido completo $K_{s,t}$.

Em seguida, direcionaremos nosso estudo aos resultados espectrais propostos por [Aharoni, Alon e Berger \(2015\)](#), [Babai e Guiduli \(2009\)](#), [Freitas, Nikiforov e Patuzzi \(2016\)](#) e [Nikiforov \(2010\)](#), a fim de retomar, passo-a-passo, as demonstrações neles propostas. Este estudo nos ajudará a compreender as ferramentas usuais na demonstração desse tipo de problema, para que possamos desenvolver e demonstrar, futuramente, nossa própria cota espectral associada à matriz Laplaciana normalizada. Até onde sabemos, não foram encontrados resultados que a vinculassem com o problema de Zarankiewicz. Entretanto, existem cotas referentes ao problema de Turán associadas a tal interpretação matricial. Tais resultados são apresentados por [Chung \(2005\)](#) e nos ajudarão a compreender melhor a dinâmica de trato com a matriz Laplaciana normalizada.

A fim de promover um prelúdio ao leitor sobre esta dissertação, informamos que no [Capítulo 1](#) será abordado todo e qualquer conceito associado a teoria de grafos necessário para a compreensão desta. O capítulo é dividido em três seções. Na primeira, abordaremos conceitos gerais de teoria de grafos. Em seguida, traremos conceitos de teoria espectral de grafos - cujo suporte matemático encontra-se no [Apêndice A](#) desta dissertação. Por fim, abordaremos o conceito de teoria extremal de grafos através da definição de grafo de Turán, e seu problema associado ao problema de Zarankiewicz.

No [Capítulo 2](#), apresentamos um apanhado histórico entre cotas inferiores e superiores associadas ao problema de Turán e Zarankiewicz. Indicamos quando há melhoras no decorrer dos anos e não nos detemos ao método de obtenção das mesmas. Apresentamos cotas obtidas, das mais diversas maneiras, seja utilizando apenas ferramentas de teoria de grafos, seja com ideias espectrais, e até mesmo algébricas, a fim de motivar o capítulo seguinte.

Apresentamos, no [Capítulo 3](#), todos os teoremas, proposições e corolários estudados durante o período de mestrado, na seguinte ordem: associados à matriz de adjacência,

associados à matriz Laplaciana, associados à matriz Laplaciana sem sinal e os associados à matriz Laplaciana normalizada. Ressaltamos que, para o caso especial das cotas relacionadas à matriz Laplaciana normalizada, desenvolveu-se o Apêndice C. Pretende-se, assim, divulgar as demonstrações dos lemas necessários para a demonstração do Teorema 3.4.1, o qual foi omitido desta dissertação por fugir do objetivo principal.

No Capítulo 4, é possível encontrar as demonstrações detalhadas dos teoremas, proposições e corolários que compõem as cotas que selecionamos como as principais para este projeto. Associado a esse capítulo, encontra-se o Apêndice B, uma vez que traz consigo resultados importantes para o transcorrer das demonstrações.

No último capítulo, apresentamos comentários sobre os resultados abordados, assim como cotas para o número de Turán, utilizando os resultados demonstrados por Aharoni, Alon e Berger (2015), Babai e Guiduli (2009), Freitas, Nikiforov e Patuzzi (2016) e Nikiforov (2010), além de uma sequência de desigualdades demonstrada no Capítulo 1. Trabalhos relacionados e aplicações são apresentados no início de cada seção, quando necessário.

1 Preliminares

A teoria de grafos é usada em redes de comunicação, informática, física, biologia, química, sociologia e em muitos outros campos. Tais aplicações serão mencionadas no transcorrer deste capítulo, associadas à terminologia básica usada na teoria de grafos, e nas subáreas espectral e extremal.

Este capítulo encontra-se dividido em três seções. Na primeira, serão abordados os conceitos básicos, como por exemplo: o que é um grafo; como este é representado; suas classificações, entre outros. Na seção seguinte abordaremos o conceito de representação matricial de grafos por meio das matrizes de adjacência, Laplaciana, Laplaciana sem sinal e Laplaciana normalizada. Por fim, faremos um breve prelúdio sobre a teoria extremal de grafos, abordando especialmente o problema de Turán, assim como seu caso particular, o problema de Zarankiewicz.

1.1 Teoria de grafos: Notação, definições e resultados

Qual é a rota mais rápida entre Brasília e Porto Alegre? Qual a melhor maneira de distribuir n turistas a n quartos, considerando preferências e disponibilidade? Quantas camadas um chip de computador precisa ter para que suas redes não se cruzem? Qual a ordem das cidades que um vendedor deve seguir para que passe o menor tempo possível viajando? Perguntas corriqueiras como essas foram e são o motivo principal para a criação e o desenvolvimento da teoria de grafos.

Um outro exemplo é o problema das sete pontes de Königsberg, considerado um dos primeiros artigos publicados na área de teoria dos grafos ([BIGGS; LLOYD; WILSON, 1976](#)). Tal problema desejava saber qual a melhor maneira de andar pela cidade de Königsberg cruzando suas pontes apenas uma vez (ver Figura 1.1). Em 1736, Euler mostrou que este problema não tem solução e abriu um leque imenso de possibilidades de estudo, instaurando, assim, os pilares da teoria de grafos. Nesta seção, apresentaremos alguns resultados básicos de tal teoria, baseados nas seguintes literaturas: [Bondy e Murty \(2008\)](#), [Diestel \(2006\)](#) e [West \(2001\)](#).

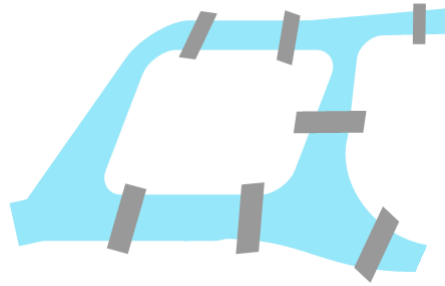


Figura 1 – Representação das sete pontes de Königsberg destacando o rio Pregel.

Um *grafo* é um par ordenado $G = (V(G), E(G))$ ¹, constituído por um conjunto finito e não vazio V , cujos elementos são denominados *vértices*, e um conjunto finito e não vazio E , de subconjuntos de dois elementos de V , denominados *arestas*. O número de elementos do conjunto V indica a *ordem* do grafo.

Neste trabalho tratamos de grafos de ordem n , ou seja, $|V| = n$, de forma que os vértices podem ser enumerados da seguinte maneira: $\{v_1, \dots, v_n\}$. Consideramos, também, que eles são *grafos simples*, ou seja, *grafos não direcionados*, sem laços (aresta que liga o vértice nele mesmo) ou arestas múltiplas.

Usamos a notação $e(G)$ para indicar o *número de arestas* em G , ou seja, $|E| = e(G)$. Quando $\{v_i, v_j\} \in E$, dizemos que v_i e v_j são *adjacentes*. Dizemos, também que v_i e v_j são *vizinhos* e os denotamos por $v_i \sim v_j$. O conjunto de todos os vértices vizinhos a v_i é chamado *vizinhança* de v_i e é denotado por $\Gamma(v_i)$.

Quando se trata de uma representação gráfica de um grafo, por padrão, o conjunto V de vértices é representado por um conjunto de pontos, os quais podem ou não estar conectados por linhas que, por sua vez, representam o conjunto E de arestas do grafo. Na imagem abaixo encontra-se um exemplo do grafo \mathcal{G} de ordem 4, com conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e de arestas $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}\}$.

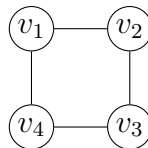


Figura 2 – Grafo \mathcal{G}

Este será o grafo base para toda e qualquer definição e exemplo abordados no presente capítulo, salvo as seguintes exceções: grafo fortemente regular, clique e grafo de Turán.

¹ Muitas vezes suprimimos o G em $V(G)$ e $E(G)$, buscando evitar uma notação carregada.

Dentre as formas de determinação e obtenção de grafos a partir de outros, encontra-se o *grafo complementar* de G . Tal grafo, denotado por \overline{G} , possui como conjunto de vértices $V(G)$ e como conjunto de arestas $\{u, v\} \in E(\overline{G})$ se, e somente se, $\{u, v\} \notin E(G)$. A fim de trazer mais clareza ao leitor, apresentamos, na figura abaixo, o complementar do grafo \mathcal{G} , encontrado na Figura 2.

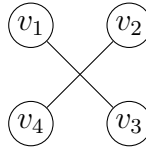


Figura 3 – Grafo complementar $\overline{\mathcal{G}}$

A partir de um grafo G , podemos definir muitos outros, apenas por retirar ou acrescentar vértices ou arestas. Se $G = (V, E)$ é um grafo e V' é um subconjunto de V , então o grafo obtido ao realizar a operação de *deleção de vértice* $G - V'$, corresponde ao grafo G sem os vértices de V' e as arestas a eles conectadas. Caso ocorra a exclusão de um único vértice v , denotamos $G - v$. A operação de *adição* de vértice/aresta, ao contrário da deleção, considera o acréscimo de vértices e arestas. Na figura abaixo apresentamos o grafo $\mathcal{G} - v_1$, onde \mathcal{G} é o grafo da Figura 2.

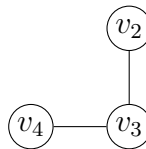


Figura 4 – $\mathcal{G} - v_1$

Um caso especial da adição é a operação de “*join*” ou *junção* entre dois grafos G_1 e G_2 , que corresponde ao grafo obtido da união disjunta de $G_1 + G_2$ pela adição das arestas $\{xy : x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$. O grafo resultante é denotado por $G_1 \vee G_2$. No exemplo a seguir, as arestas com formatação tracejadas correspondem a operação de “*join*” entre o grafo de vértice único K_1 , identificado pelo vértice u , e o grafo \mathcal{G} da Figura 2.

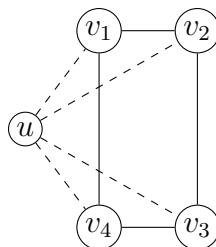


Figura 5 – $K_1 \vee \mathcal{G}$.

Quando são usadas restrições nos conjuntos V e E de um grafo G , ou seja, quando se considera subconjuntos $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$ determina-se um novo grafo $G' = (V', E')$. O grafo gerado por esta operação é denominado *subgrafo* de G . Este é dito *subgrafo induzido* quando é obtido ao deletar um conjunto de vértices $S \subset V$ de um grafo G , ou seja, um subgrafo de G induzido por S , $G[S]$, é obtido ao operar $G - (V \setminus S)$. Seu conjunto de vértices é denotado por $V_S = V(G[S])$, seu conjunto de arestas é denotado por $E_S = E(G[S])$, assim como o número de arestas do grafo $G[S]$ é denotado por $e_S = e(G[S])$. Nas figuras abaixo apresentamos um subgrafo e um subgrafo induzido de \mathcal{G} (Figura 2).

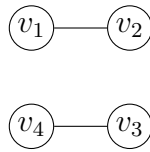


Figura 6 – Subgrafo de \mathcal{G}

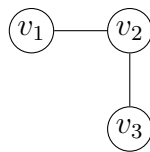


Figura 7 – $\mathcal{G}[S]$ subgrafo induzido por $S = \{v_4\}$

Dentre os demais tipos de grafos mencionamos também o *grafo completo* K_n , que ocorre se, e somente se, todos seus vértices são adjacentes dois a dois, o *grafo r -partido*², que ocorre quando V admite ser particionado em $r \geq 2$ classes não vazias e disjuntas duas a duas, tal que cada aresta de E começa e termina em classes distintas, e não há vértices adjacentes em uma mesma classe da partição, e por fim, o *grafo r -partido completo* K_{n_1, \dots, n_r} que ocorre se quaisquer dois vértices de diferentes classes da partição são adjacentes. O grafo $K_{1, n-1}$ é chamado de *estrela*, e pode ser denotado por S_n . A fim de que o leitor visualize estes grafos apresentamos exemplos dos mesmos a seguir.

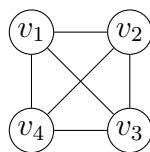
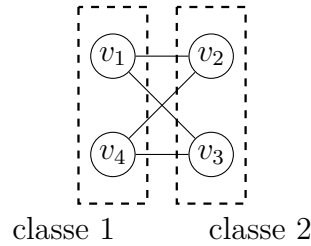


Figura 8 – Grafo completo K_4

² Quando um grafo for particionado com $r = 2$ ou $r = 3$ este pode ser referenciado como grafo 2-partido ou 3-partido, assim como por *grafo bipartido* ou *tripartido*.

Figura 9 – Grafo bipartido completo $K_{2,2}$

Faz-se necessário definir, também o *grau de um vértice* v_i de G , denotado $d(v_i)$. Este corresponde ao número de arestas conectadas ao vértice v_i . Equivalentemente, o grau de um vértice pode ser interpretado como o número $|\Gamma(v_i)|$ de vizinhos que v_i possui, e está relacionado ao número de vizinhos em comum entre dois vértices v_i e v_j , denotado por $d(v_i, v_j)$, pela seguinte expressão $d(v_i, v_j) = |\Gamma(v_i) \cap \Gamma(v_j)|$.

Quando trata-se dos extremos dos graus do grafo G , define-se o *grau mínimo* δ como o menor grau dentre todos os graus dos vértices de G ; o *grau máximo* Δ como o maior grau dentre todos os graus dos vértices de G , e o *grau médio* \bar{d} como

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v) = 2 \frac{e(G)}{n},$$

uma vez que a soma dos graus dos vértices de G é igual ao dobro do número de arestas de G . E essas três definições são relacionadas da seguinte maneira

$$\delta \leq \bar{d} \leq \Delta.$$

Ao tomarmos a soma dos graus dos vértices de G , encontramos o seu volume, ou seja,

$$vol(G) = \sum_{v \in V} d(v).$$

Tal volume pode ser generalizado, através da escolha de um número inteiro positivo k e de um subconjunto X de vértices de G , como apresentado a seguir

$$vol_k(X) = \sum_{v \in X} d(v)^k.$$

Definido o grau de cada vértice de um grafo podemos introduzir o conceito de *grafo regular* e *grafo fortemente regular*. O primeiro ocorre quando todos os vértices de G possuem o mesmo grau. O segundo é dito fortemente regular se existem inteiros positivos k, l, m tal que, todo vértice possui k vizinhos, todo par de vértices adjacentes tem l vizinhos em comum, e todo par não adjacente tem m vizinhos em comum. Se G é um grafo de ordem n e fortemente regular podemos denotá-lo por $srg(n, k, l, m)$. Apresentamos, a seguir representações de tais grafos.

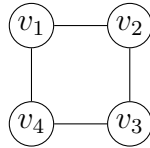
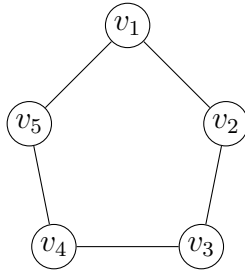


Figura 10 – Grafo 2-regular

Figura 11 – $srg(5, 2, 0, 1)$

Definimos, também o *clique* de um grafo como o conjunto de vértices de G mutuamente adjacentes. O *número de clique* $\omega(G)$ corresponde a cardinalidade do maior clique em G . Segue abaixo a ilustração de um clique em um grafo, cujas arestas que não pertencem ao clique receberam a formatação tracejada, a fim de dar mais destaque ao mesmo.

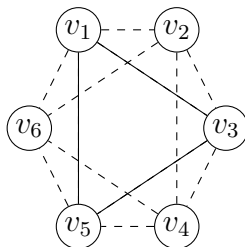


Figura 12 – Clique

Considerando que um *caminho* é um grafo cujos vértices podem ser ordenados, de maneira que dois deles são adjacentes se, e somente se, são consecutivos na lista e são todos distintos, conclui-se que um clique está presente no caminho de um grafo. Um *passoio* é um caminho onde os vértices não são todos distintos.

Quando existir um caminho entre qualquer par de vértices, diz-se que o grafo é *conexo*. Quando tal caminho possuir vértices inicial e final idênticos, diz-se que o grafo é um *ciclo*. Sendo denotado por C_n , com n o número de vértices que o compõem. Diz-se também, que um grafo G é uma *árvore* se, e somente se, existir um único caminho entre cada par de vértices de tal.

Uma *k-coloração* é uma função $f : V \rightarrow S$ tal que vértices adjacentes não possuem a mesma cor, onde S é um conjunto de k “cores”. Portanto, uma *k-coloração* pode ser

vista como uma partição $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de V , onde V_i denota um conjunto vazio, ou não, de vértices associados a cor i . Tais conjuntos V_i , são ditos *classes de coloração*. Quando k assume o valor mínimo para que G admita uma k -coloração, passa a ser chamado de *número cromático*, e é denotado por $\chi(G)$.

Por fim, estabelecemos o *homomorfismo* entre um grafo G em um grafo H , como uma função $f : V(G) \rightarrow V(H)$, tal que $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$ para todo $\{u, v\} \in E(G)$. Quando H for o grafo completo K_k , um homeomorfismo de G em H é simplesmente uma k -coloração de G .

1.2 Teoria espectral de grafos: Notação, definições e resultados

A teoria espectral de grafos muitas vezes é considerada como uma tentativa de utilizar álgebra linear para o propósito da teoria de grafos e suas aplicações. Isso não significa que a teoria espectral de grafos pode ser reduzida à teoria matricial, pelo contrário, esta possui suas próprias características e maneiras específicas de raciocínio, justificando plenamente o direito de ser tratada como uma teoria (CVETKOVIĆ; DOOB; SACHS, 1980).

Sua origem encontra-se na química, quando utilizada pela primeira vez por Hückel (1932), na produção de um modelo teórico para o problema de moléculas de hidrocarbonetos não saturados, onde os níveis de energia de certos elétrons eram representados por autovalores de um grafo. A teoria espectral de grafos foi consolidada somente em 1971, por meio da tese de doutorado de Cvetković (1971).

Até os anos 90 as principais áreas, além da matemática, que abordavam conceitos de teoria espectral de grafos eram a química orgânica (GUTMAN; POLANSKY, 1986 apud GUIDULI, 1996), termodinâmica (HEILMANN; LIEB, 1972 apud GUIDULI, 1996) e mecânica quântica (MCWEENY; SHUTCLIFFE, 1969 apud GUIDULI, 1996). Atualmente, além de estar presente na área de físico-química (CHOI; CHO, 2014), têm sido incorporada em tantas outras áreas, como na música (MCFEE; ELLIS, 2014) e na medicina, em especial no estudo de doenças como o câncer (RAI et al., 2017) e o Alzheimer (DAIANU et al., 2015).

Nessa seção, apresentamos as principais representações de grafos através de matrizes, os resultados pertinentes aos seus espectros, algumas características relacionadas a eles, entre outras ferramentas necessárias para esta dissertação. Indicamos como referência a esta seção os seguintes livros: Abreu et al. (2014), Butler (2016), Chung (1994), Cvetković, Rowlinson e Simić (2009), Diestel (2006), Franklin (2000) e Stevanović (2014), assim como os seguintes artigos Brondani et al. (2013), Lin, Hong e Shu (2015) e Oliveira et al. (2010).

Primeiramente introduziremos o conceito de matriz diagonal dos graus dos vértices de G , que será referida no transcorrer do texto como simplesmente matriz diagonal de G por motivos de simplificação.

Definição 1.2.1 (Matriz diagonal). *Seja $G = (V, E)$ um grafo de ordem n e $d(v_i)$ os graus de seus vértices. A matriz diagonal dos graus, ou apenas matriz diagonal $D(G)$ é uma matriz de ordem n cujas entradas $d_{i,j}$ são*

$$d_{i,j} = \begin{cases} d(v_i), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1.2.1 (Matriz diagonal associada a \mathcal{G} (Figura 2)).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A seguir, definimos a matriz de adjacência, que como o próprio nome sugere, é construída a partir das relações de adjacência entre os vértices de um grafo. Em particular, esta é usualmente utilizada quando necessita-se obter propriedades estruturais de um grafo (STEVANOVIC, 2014).

Definição 1.2.2 (Matriz de adjacência). *Seja $G = (V, E)$ um grafo de ordem n . A matriz de adjacência $A(G)$ associada a G é uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas $a_{i,j}$ são definidas por*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1.2.2 (Matriz de adjacência associada a \mathcal{G} (Figura 2)).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Definimos, a seguir a matriz Laplaciana, outra ferramenta importante para obter informações sobre as invariantes de um grafo.

Definição 1.2.3 (Matriz Laplaciana). *Seja $G = (V, E)$ um grafo, a matriz Laplaciana $L(G)$ de G possui entradas definidas da seguinte maneira*

$$l_{i,j} = \begin{cases} d(v_i), & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1.2.3 (Matriz Laplaciana associada a \mathcal{G} (Figura 2)).

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Note que a matriz Laplaciana está associada à matriz de adjacência $A(G)$ e à matriz diagonal $D(G)$, uma vez que pode ser definida a partir da seguinte operação $L(G) = D(G) - A(G)$.

Apresentamos também a definição de matriz Laplaciana sem sinal, a qual tem recebido muito destaque nos últimos anos, por acreditar-se que pode descrever as propriedades estruturais do grafo trabalhado. Um exemplo de seu uso encontra-se no trabalho de [Desai e Rao \(1991\)](#), onde o menor autovalor associado a matriz Laplaciana sem sinal de um grafo G conexo é usado como medida de proximidade deste com um grafo bipartido uma vez que o autovalor 0 na matriz Laplaciana sem sinal ocorre se, e somente se, G é bipartido.

Definição 1.2.4 (Matriz Laplaciana sem sinal). *Seja $G = (V, E)$ um grafo, a matriz Laplaciana sem sinal $Q(G)$ associada a G é definida da seguinte forma*

$$q_{i,j} = \begin{cases} d(v_i), & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A matriz Laplaciana sem sinal de G é obtida da operação de soma da matriz de adjacência $A(G)$ com a matriz diagonal $D(G)$, isto é, $Q(G) = D(G) + A(G)$.

Exemplo 1.2.4 (Matriz Laplaciana sem sinal associada a \mathcal{G} (Figura 2)).

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Por fim, abordamos o conceito de matriz Laplaciana normalizada, matriz com utilização mais recente na teoria espectral de grafos. Creditamos boa parte do estudo e aplicação desta matriz em teoria de grafos à Fan Chung e seus trabalhos, dentre eles ([CHUNG, 1994](#)).

Definição 1.2.5 (Matriz Laplaciana normalizada). *Seja $G = (V, E)$ um grafo de ordem n , a matriz Laplaciana normalizada $\mathcal{L}(G)$ associada a G têm entradas definidas da seguinte*

maneira

$$l_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \text{ e } d(v_i) \neq 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{d(v_i)d(v_j)}}, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1.2.5 (Matriz Laplaciana normalizada associada a \mathcal{G} (Figura 2)).

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Note que a matriz Laplaciana normalizada pode ser escrita em termos da matriz diagonal e da matriz Laplaciana, desde que seja convencionado que

$$D^{-1}(G)d_{i,i} = 0$$

para $d(v_i) = 0$, ou seja, se v_i é um vértice isolado.

$$\mathcal{L}(G) = D^{-1/2}(G) L(G) D^{-1/2}(G). \quad (1.5)$$

A definição de $\mathcal{L}(G)$ em termos das matrizes diagonal e Laplaciana foi introduzida a fim de trazer mais clareza e simplicidade às demonstrações. Acrescentamos, também que quando não houver perigo de confusão denotaremos $D(G)$, $A(G)$, $L(G)$, $Q(G)$ e $\mathcal{L}(G)$ por D , A , L , Q e \mathcal{L} de forma que o grafo ao qual estão associadas estará subentendido no contexto aplicado.

As últimas quatro matrizes definidas acima são reais e simétricas, logo seus autovalores são reais e podem ser ordenados. Convencionamos que dada uma matriz M real e simétrica, seus autovalores serão ordenados da seguinte maneira

$$\lambda_1(M) \geq \lambda_2(M) \geq \cdots \geq \lambda_n(M), \quad (1.6)$$

havendo supressão do índice numérico quando abordado o conceito de índice do grafo.

Dentre as propriedades dos autovalores associados as matrizes de adjacência, Laplaciana, Laplaciana sem sinal e Laplaciana normalizada, destacamos como necessárias as seguintes. Para mais informações sugerimos consultar: [Abreu et al. \(2014\)](#), [Chung \(1994\)](#), [Guiduli \(1996\)](#) e [Stevanović \(2014\)](#).

Proposição 1.2.1. *Dado um grafo G , sua matriz Laplaciana L e os autovalores associados a mesma $\lambda_1(L) \geq \lambda_2(L) \geq \cdots \geq \lambda_n(L)$, têm-se que o menor autovalor $\lambda_n(L)$ é nulo, e está associado ao autovetor de uns $\mathbf{1}$.*

Demonstração

Note que

$$\sum_j l_{i,j} = 0$$

para qualquer linha i fixada, portanto $L\mathbf{1} = \mathbf{0} = \mathbf{0}\mathbf{1}$. □

Proposição 1.2.2. *Seja G um grafo com n vértices, então:*

1.

$$\sum_i \lambda_i(\mathcal{L}) \leq n$$

com igualdade se, e somente se, G não possui vértices isolados.

2. O menor autovalor $\lambda_n(\mathcal{L})$ é nulo.

3. Para $n \geq 2$ e G um grafo sem vértices isolados

$$\lambda_1(\mathcal{L}) \geq \frac{n}{n-1}.$$

Havendo igualdade quando G for um grafo completo com n vértices.

4. Para todo $1 \leq i \leq n$, temos

$$\lambda_i(\mathcal{L}) \leq 2,$$

com $\lambda_1(\mathcal{L}) = 2$ se, e somente se, G é bipartido.

Demonstração

1. Segue diretamente da soma dos elementos da diagonal de \mathcal{L} .

2. Note que

$$\sum_j l_{i,j} = 0$$

para qualquer linha i fixada.

3. Segue diretamente dos itens anteriores.

4. Considerando f uma autofunção harmônica de \mathcal{L} e de acordo com o que é apresentado no Apêndice C têm-se

$$(f(u) - f(v))^2 \leq (2(f^2(u) + f^2(v)))$$

que pode ser entendida da seguinte forma

$$\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2 \leq 2 \sum_{u \sim v} (f^2(u) + f^2(v)) \leq 2 \sum_{v \in V(G)} d(v) f^2(v).$$

Logo

$$\frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_{v \in V(G)} d(v) f^2(v)} \leq 2.$$

Tomando o supremo desta expressão, e usando a equação (C.2), conclui-se que

$$\lambda_1(\mathcal{L}) = \sup_f \left(\frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_{v \in V(G)} d(v) f^2(v)} \right) \leq 2.$$

□

O conceito de índice de um grafo, também conhecido como *raio espectral* (geralmente associado à matriz de adjacência) e *q-índice* (associado a matriz Laplaciana sem sinal), é apresentado a seguir juntamente com algumas relações entre este e demais propriedades dos grafos.

Definição 1.2.6 (Índice). *O índice de um grafo G é o maior autovalor associado a uma matriz $M(G)$, sendo denotado por $\lambda(M)$.*

Apresentamos os índices associados às matrizes de adjacência (1.1), Laplaciana (1.2), Laplaciana sem sinal (1.3) e Laplaciana normalizada (1.4) referentes ao grafo \mathcal{G} , descrito na Figura 2.

- Matriz de adjacência

$$\lambda(A) = 2$$

- Matriz Laplaciana

$$\lambda(L) = 4$$

- Matriz Laplaciana sem sinal

$$\lambda(Q) = 4$$

- Matriz Laplaciana normalizada

$$\lambda(\mathcal{L}) = 2$$

Nesta dissertação consideramos que a matriz M poderá ser substituída pela matriz de adjacência, Laplaciana, Laplaciana sem sinal e Laplaciana normalizada, sempre indicando a matriz tratada. Caso haja omissão da matriz associada esta será alertada no transcorrer do trabalho.

A seguir são apresentadas algumas relações entre o índice e as demais propriedades de um grafo, em especial a relação deste com o grau máximo.

Proposição 1.2.3. *Se G é um grafo com índice $\lambda(A)$, então*

$$\bar{d} \leq \lambda(A) \leq \Delta. \tag{1.7}$$

Demonstração

Mostremos que $\lambda(A) \leq \Delta$.

Seja \mathbf{x}_1 autovetor associado a $\lambda(A)$, olhemos para sua maior componente $x_{1,u}$, que ocorre na posição associada ao vértice u . Uma vez que a matriz de adjacência é composta apenas de zeros e uns, têm-se que

$$Ax_{1,u} = \lambda(A)x_{1,u} = \sum_{j \in \Gamma(u)} x_{1,j}.$$

Em particular,

$$\sum_{j \in \Gamma(u)} x_{1,j} \leq \sum_{j \in \Gamma(u)} x_{1,u} = d(u)x_{1,u} \leq \Delta x_{1,u}.$$

Portanto

$$\lambda(A)x_{1,u} \leq \Delta x_{1,u},$$

ou seja,

$$\lambda(A) \leq \Delta.$$

Mostremos que $\bar{d} \leq \lambda(A)$.

Supondo G um grafo de ordem n com $A(G)$ sua matriz de adjacência, λ o índice associado a mesma, e usando o Princípio de Rayleigh (Teorema A.2.2), garante-se que

$$\lambda = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}.$$

Tomando o vetor \mathbf{x} como o vetor $\mathbf{1}$ e substituindo na igualdade acima, temos

$$\frac{\mathbf{1}^T A \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{1}} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n d(v_i)}{n} = \bar{d},$$

portanto $\bar{d} \leq \lambda$. □

Uma vez que \bar{d} é determinado pela média das somas dos graus dos vértices de G , é possível determinar a seguinte desigualdade

$$\frac{2e(G)}{n} \leq \lambda(A), \tag{1.8}$$

a qual será peça fundamental para a introdução e justificativa da abordagem espectral apresentada nos capítulos seguintes.

Na proposição a seguir mostra-se um limite superior para o índice de $L(G)$ em função do grau máximo de G .

Proposição 1.2.4. *Para todo grafo G com índice $\lambda(L)$, e Δ o grau máximo de G , temos*

$$\lambda(L) \leq 2\Delta. \tag{1.9}$$

Demonstração

Por hipótese $\lambda(L) = \max_i \{\lambda_i\}$, com λ_i os autovalores associados à matriz L .

Pelo Corolário A.2.1,

$$\lambda(L) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |l_{i,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \{2d(v_i)\} = 2\Delta.$$

□

A Proposição 1.2.5 dá um limite superior para o índice de $Q(G)$ em função dos graus dos vértices de G .

Proposição 1.2.5. *Para todo grafo G com índice $\lambda(Q)$, e Δ o grau máximo de G , temos*

$$\lambda(Q) \leq 2\Delta. \quad (1.10)$$

Demonstração

Por hipótese $\lambda(Q) = \max_i \{\lambda_i\}$, com λ_i os autovalores associados à matriz Q .

Pelo Corolário A.2.1,

$$\lambda(Q) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |q_{i,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \{2d(v_i)\} = 2\Delta.$$

□

Em seu trabalho Yan (2002), enuncia e demonstra a seguinte relação entre o índice de um grafo G associado à matriz de adjacência e à matriz Laplaciana sem sinal.

Proposição 1.2.6. *Seja G um grafo conexo com n vértices, então*

$$\lambda(A) \leq \frac{\lambda(Q)}{2}. \quad (1.11)$$

Demonstração

Note que a matriz Laplaciana sem sinal pode ser escrita da seguinte forma $D + A = 2A + (D - A)$ e que $\lambda_n(D - A) = 0$.

Pelas desigualdades de Courant-Weyl (CVETKOVIĆ; DOOB; SACHS, 1980, p. 51) segue que

$$\lambda_i(Q) = \lambda_i(D + A) \geq \lambda_i(2A) + \lambda_n(D - A) = 2\lambda_i(A),$$

para $1 \leq i \leq n$.

Tomando $i = 1$, conclui-se que $\lambda(A) \leq \frac{\lambda(Q)}{2}$.

□

A seguinte relação entre $\lambda(L)$ e $\lambda(Q)$ é proposta e demonstrada por [Zhang e Luo \(2002\)](#), e corresponde ao Lema 2.1.

Proposição 1.2.7. *Seja G um grafo, logo*

$$\lambda(L) \leq \lambda(Q). \quad (1.12)$$

Se G é conexo, então a igualdade em (1.12) vale se, e somente se, G é um grafo bipartido.

Outra relação associada aos índices das matrizes Laplaciana e Laplaciana sem sinal é a seguinte.

Proposição 1.2.8. *Seja G um grafo conexo, então*

$$\frac{\lambda(Q)}{2} \leq 3\Delta - \lambda(L). \quad (1.13)$$

Demonstração

Das proposições [1.2.4](#) e [1.2.5](#) sabemos que $\lambda(L) \leq 2\Delta$ e $\lambda(Q) \leq 2\Delta$.

Notemos que a segunda desigualdade pode ser reescrita como $\frac{\lambda(Q)}{2} \leq \Delta$, logo

$$\frac{\lambda(Q)}{2} + \lambda(L) \leq \Delta + \lambda(L) \leq 3\Delta,$$

portanto,

$$\frac{\lambda(Q)}{2} \leq 3\Delta - \lambda(L).$$

□

Apresentamos, também a seguinte relação entre os índices $\lambda(\mathcal{L})$ e $\lambda(L)$, que deriva do caso geral, proposto e demonstrado por [Butler \(2008\)](#).

Teorema 1.2.1. *Seja G um grafo, com n vértices e sem vértices isolados. Então*

$$\frac{\lambda(L)}{\Delta} \leq \lambda(\mathcal{L}). \quad (1.14)$$

Por fim, notemos que as cotas [\(1.8\)](#), [\(1.11\)](#), [\(1.13\)](#) e [\(1.14\)](#) podem ser organizadas da seguinte maneira

$$\frac{2e(G)}{n} \leq \lambda(A) \leq \frac{\lambda(Q)}{2} \leq 3\Delta - \lambda(L) \leq \Delta(3 - \lambda(\mathcal{L})), \quad (1.15)$$

o que caracteriza uma ordenação dos índices associados as matrizes A , L , Q e \mathcal{L} , em relação ao grau médio de G . Tal disposição possibilita a escolha do melhor índice associado a uma matriz, para fins de comparação com os demais, assim como cotas associadas ao número de arestas e ao grau médio de G .

Exemplo 1.2.6. *Pela definição do grafo \mathcal{G} , este possui $e(\mathcal{G}) = 4$, 4 vértices e $\Delta = 2$. Portanto seu grau médio corresponde a*

$$\frac{2 \cdot 4}{4} = 2.$$

Determinemos o grau médio do mesmo usando os fatos a seguir

- Para $\frac{2e(\mathcal{G})}{n} \leq \lambda(A)$ com $\lambda(A) = 2$

$$\frac{2e(\mathcal{G})}{n} \leq 2$$

- Para $\frac{2e(\mathcal{G})}{n} \leq \lambda(L)$ com $\lambda(L) = 4$

$$\frac{2e(\mathcal{G})}{n} \leq 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

- Para $\frac{2e(\mathcal{G})}{n} \leq \lambda(Q)$ com $\lambda(Q) = 4$

$$\frac{2e(\mathcal{G})}{n} \leq \frac{4}{2} = 2$$

- Para $\frac{2e(\mathcal{G})}{n} \leq \lambda(\mathcal{L})$ com $\lambda(\mathcal{L}) = 2$

$$\frac{2e(\mathcal{G})}{n} \leq 2(3 - 2) = 2$$

logo todas as desigualdades resultam, no fato verdadeiro de que $\frac{2e(\mathcal{G})}{n} \leq 2$.

1.3 Teoria extremal de grafos: Notação, definições e resultados

A teoria extremal de grafos estuda grafos extremais (máximos ou mínimos) que satisfazem uma determinada propriedade, de forma que esta extremalidade possa estar relacionada a diferentes invariantes, tais como ordem, número de arestas, entre outros.

Seu início é marcado pelos problemas propostos por [Turán \(1941\)](#), no entanto, existem argumentos que o resultado de Euler para grafos planares ($|E| \leq 3|V(G)| - 6$) foi o primeiro teorema em teoria extremal de grafos ([GUIDULI, 1996](#)). Atualmente, qualquer problema da forma “qual o valor máximo/mínimo de um dado parâmetro para uma certa classe de grafo?” pode ser entendido como um problema extremal, como menciona [Lovász \(1993\)](#).

Nesta dissertação nos restringimos ao caso da busca pelo maior número de arestas em um grafo G com determinada ordem, e que tenha algum subgrafo específico proibido

- também conhecido como problema do tipo de Turán. Para os leitores interessados em aprofundar seu conhecimento em teoria extremal de grafos, sugerimos a consulta dos seguintes autores [Bollobás \(1995\)](#) e [Simonovits \(1983\)](#), assim como daqueles que suportam a teoria apresentada nesta seção, como [Bondy e Murty \(2008\)](#), [Diestel \(2006\)](#), [Füredi e Simonovits \(2013\)](#) e [Guiduli \(1996\)](#).

Os problemas do tipo de Turán ocorrem quando dado um grafo G de ordem n com $e(G)$ arestas, e uma família \mathcal{H} de grafos, busca-se maximizar $e(G)$ sobre a condição de que G não contenha nenhum subgrafo $H \in \mathcal{H}$, ou seja, G é um *grafo livre* de H . Tal valor máximo de arestas é denominado *número de Turán*, e será representado por $ex(G, H)$, onde a primeira entrada corresponde ao grafo principal G de ordem n , e a segunda ao subgrafo H excluído.

O número de Turán satisfaz

$$e(G) \leq ex(G, H)$$

([PACH; TARDOS, 2006](#)), assim como, satisfaz

$$\frac{2ex(G, H)}{n} \leq \lambda(A). \quad (1.16)$$

Para verificar a veracidade da última, basta tomar o máximo em (1.8). Da relação entre $e(G)$ e $ex(G, H)$, obtêm-se o lado esquerdo, e do fato de que o máximo de $\lambda(A)$ é $\lambda(A)$, uma vez que este é o maior autovalor possível, obtêm-se o lado direito de tal desigualdade.

A função $ex(G, H)$ apresenta a seguinte dicotomia: se H é não bipartido, então $ex(G, H)$ cresce quadraticamente em n . Se H é bipartido, $ex(G, H)$ é subquadrático, e a ordem de magnitude é conhecida apenas para determinados H s ([BUKH; JIANG, 2017](#)). Esta última restrição tem motivado muitas pesquisas na área, especialmente por ser um campo novo, com poucos estudos associados, o que nos motiva a trabalhar com a exclusão de grafos bipartidos.

As classes mais simples de grafos bipartidos são árvores, ciclos de comprimento par e grafos bipartidos completos, das quais a primeira e a última são mais recorrentes na literatura voltada ao problema de Turán ([BUKH; JIANG, 2017](#)). Ao abordar a exclusão de grafos bipartidos, nos preocuparemos apenas com os bipartidos completos visto que buscamos trabalhar com o problema de Zarankiewicz, a ser abordado em seguida, e que possui uma de suas aplicações apresentada por [Xu et al. \(2016\)](#).

Primeiramente, definiremos grafo de Turán e, em seguida, o teorema de mesmo autor, uma vez que ambos estão correlacionados pelo fato de que Turán mostrou que nenhum grafo livre de K_{t+1} com n vértices pode conter mais arestas do que o grafo de Turán $T(n, t)$, e que este é único. Um caso especial deste ($t = 2$) foi resolvido por [Mantel \(1907 apud GUIDULI, 1996\)](#).

Definição 1.3.1 (Grafo de Turán). Um grafo de Turán, $T(n, t)$, é um grafo t -partido completo com n vértices, cujos conjuntos das partições possuem $\lceil n/t \rceil$ ou $\lfloor n/t \rfloor$ vértices.

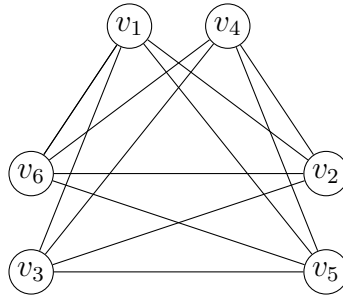


Figura 13 – Grafo de Turán $T(6, 3)$.

Teorema 1.3.1. Seja G um grafo simples livre de K_{t+1} , com $t \geq 2$. Então,

$$ex(G, K_{t+1}) \leq e(T(n, t)). \quad (1.17)$$

A igualdade é válida se, e somente se, G é isomorfo a $T(n, t)$.

Omitiremos a demonstração do teorema acima, uma vez que a mesma foge do objetivo principal deste trabalho, vinculado a demonstrações associadas a teoria espectral de grafos. Para os interessados, um esboço da demonstração deste resultado pode ser encontrada em (SIMONOVITS, 1983, pp. 164), assim como um compilado de outras maneiras de demonstrar tal teorema encontra-se disponível em (AIGNER et al., 2004), e uma generalização pode ser encontrada em (SUDAKOV; SZABÓ; VU, 2005).

Quando o problema de Turán passa a abordar a exclusão de um grafo bipartido completo, este recebe o título de problema de Zarankiewicz, em homenagem ao matemático polonês Kazimierz Zarankiewicz, que enunciou tal problema em (ZARANKIEWICZ, 1951) no ano de 1951.

Zarankiewicz propôs que fosse calculado o número máximo de uns em uma matriz binária³ de tamanho $m \times n$, considerando que esta não possui $J_{s,t}$ como submatriz de tamanho $s \times t$ com todas entradas iguais a 1. Tal número é definido por $z(m, n, s, t)$, e é chamado de *número de Zarankiewicz*. Esse problema popularizou-se na área de teoria de grafos, ganhando a seguinte versão, que permanece em aberto para $s = t \geq 3$ (GUIDULI, 1996), uma vez que não existe um grafo extremal simples, como no caso do Teorema 1.3.1.

Problema 1.3.1. Seja $G = (X, Y, E)$ um grafo bipartido com n vértices na partição X e m vértices na partição Y . Supondo que G não contenha uma cópia de $K_{s,t}$, com s vértices em X e t vértices em Y , então $z(m, n, s, t)$ é o número máximo de arestas em G .

³ Matriz composta por zeros e uns.

Seu caso geral é densamente encontrado na literatura, e será amplamente discutido nesta dissertação. O mesmo aborda o problema para um grafo G de ordem n sem a necessidade deste ser bipartido, uma vez que para evitar a existência de um grafo $K_{s,t}$, basta garantir que qualquer subgrafo bipartido H de G não o contenha.

Apesar de tratados como problemas distintos, os questionamentos de Turán e Zarankiewicz têm muito em comum. Não só pelo problema de Zarankiewicz ser um caso especial do de Turán, mas também pelo fato de que quando exclui-se um grafo $K_{s,t}$ de G , têm-se a seguinte relação entre ex e z (BALBUENA et al., 2008).

$$ex(G, K_{s,t}) = z(m, n, s, t) \quad (1.18)$$

Levando em consideração que os problemas de Turán e de Zarankiewicz não possuem soluções exatas para qualquer s e t , apresentadas até o momento, no próximo capítulo será apontado um compilado de soluções próximas às exatas, sejam as obtidas por argumentos algébricos, de combinatória ou de álgebra linear.

2 Cotas associadas aos problemas de Turán

Quando as soluções exatas não podem ser determinadas, estimam-se intervalos que as contém, sempre procurando pelo mais próximo a solução. A busca pela redução dos intervalos, comumente se desdobra em dois novos problemas: a investigação de maiores cotas inferiores ou a investigação de menores cotas superiores, de forma que as cotas inferiores correspondam ao limite inferior do intervalo (valor que antecede a solução exata) e as cotas superiores correspondam ao limite superior do intervalo (valor que sucede a solução exata). Motivados por tal fato intuitivo, buscamos apontar cronologicamente as principais cotas encontradas na literatura para os problemas de Turán e Zarankiewicz.

O problema de Turán é datado de 1941, e têm como resultado principal a seguinte cota associada ao maior número de arestas em um grafo G livre de K_{t+1} .

$$ex(G, K_{t+1}) \leq e(T(n, t)),$$

com igualdade se, e somente se, $G = T(n, t)$.

Tal problema foi estendido por Erdős e Stone (1946) para a exclusão do grafo $(t+1)$ -partido completo com r vértices em cada classe de coloração, denotado por $K_{t+1}(r)$. Eles mostraram que o número máximo de arestas de um grafo que não contém $K_{t+1}(r)$ depende apenas de t e n , ou seja,

$$ex(G, K_{t+1}(r)) \leq \left(1 - \frac{1}{t}\right) \binom{n}{2} + o(n^2). \quad (2.1)$$

Sua ordem de magnitude foi garantida apenas em 1976 por Bollobás, Erdős e Simonovits como informado por (FÜREDI, 1992).

O problema de Zarankiewicz foi proposto cinco anos mais tarde, em 1951. Da sua proposta inicial surgem as seguintes soluções intuitivas quando exclui-se $K_{s,1}$ e $K_{s,2}$ (FÜREDI, 1996a).

$$z(m, n, s, 1) = (s-1)n$$

e

$$z(n, n, s, 2) \leq n\sqrt{(s-1)n - s} + \frac{1}{4} + \frac{n}{4}$$

Sendo a última solução assintoticamente justa ao considerar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(n, n, s, 2)n^{-3/2} = \sqrt{s-1}$$

(FÜREDI, 1996a). Tal igualdade foi mostrada correta quando $s = 2$ por Kóvari, Sós e Turán (1954), quando $s = 3$ por Hyltén-Cavallius (1958) e para todo s por Mörs (1981).

No ano de 1954, [Kóvari, Sós e Turán](#) propuseram a seguinte cota ao problema de Zarankiewicz.

$$z(n, n, s, t) < (s - 1)^{1/t} n^{2-1/t} + (t - 1)n \quad (2.2)$$

Sua ordem de magnitude, $O(n^{2-1/t})$, é conjecturada a melhor possível ([BABAI; GUIDULI, 2009](#); [BLAGOJEVIĆ; BUKH; KARASEV, 2013](#)), tendo sido verificada para $s = 2$ e para todo t por Klein - como mostrado por [Erdős \(1938\)](#), para $s = 3$ e todo t por [Erdős \(1938\)](#), e para todo s, t com $s \geq (t - 1)!$ por [Alon, Rónyai e Szabó \(1999\)](#). Além disso, a cota é justa para $s = t = 2$ como visto por [Brown \(1966\)](#) e [Erdős, Rényi e Sós \(1966\)](#), e para $s = 2$ e todo t como visto por [Füredi \(1996b\)](#).

Quatro anos depois, [Hyltén-Cavallius \(1958 apud ZNÁM, 1963\)](#) propôs a seguinte cota ao problema de Zarankiewicz

$$z(n, n, t, t) < 1 + (t - 1)n + (t - 1)^{1/t} n^{(2t-1)/t},$$

que foi melhorada por [Znám \(1963\)](#).

$$z(n, n, t, t) < 1 + \frac{(t - 1)n}{2} + (t - 1)^{1/t} n^{(2t-1)/t}$$

Que, por sua vez melhora o termo de segunda ordem encontrado em (2.2) ([FÜREDI, 1996a](#)).

Em 1964, Erdős publicou o artigo ([ERDÖS, 1964](#)), no qual menciona a seguinte conjectura.

Conjectura 2.0.1. *Seja G um grafo de ordem n livre de $K_{t,t}$. Se $t \geq 2$, então*

$$ex(G, K_{t,t}) > cn^{2-1/t}, \quad (2.3)$$

onde c é uma constante que depende de t .

Mostrada verdadeira em 1966 para $t = 2$ e $t = 3$ por [Brown \(1966\)](#) e [Erdős, Rényi e Sós \(1966\)](#), e aprimorada em 1996 por Füredi em ([FÜREDI, 1996b](#)) e ([FÜREDI, 1996c](#)), e por [Kóllar, Rónyai e Szabó em \(KOLLÁR; RÓNYAI; SZABÓ, 1996\)](#).

Ainda em 1966, [Erdős, Rényi e Sós](#), considerando $t = 2$ concluíram que a cota acima pode ser expressada da seguinte maneira.

$$ex(G, K_{2,t+1}) = \frac{\sqrt{t}}{2}(1 + o(1))n^{3/2}$$

Caracterizada como uma boa estimativa ao problema de Turán, exceto para a exclusão de grafos bipartidos ([FÜREDI, 1996a](#)), a seguinte cota, proposta por [Erdős e Simonovits \(1966\)](#), considera que G é um grafo livre de um subgrafo qualquer $H \in \mathcal{H}$, e é uma consequência imediata às cotas (2.1) e (2.2).

Teorema 2.0.1. *Se $\chi(H) \geq 3$, então*

$$ex(G, H) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}\right) \binom{n}{2} + o(n^2).$$

Tal cota inferior pode ser encontrada na literatura associada a Erdős-Stone-Simonovits, uma vez que Erdős e Stone (1946) e Erdős e Simonovits (1966) apresentam a mesma cota por meio de ferramentas distintas. Sendo posteriormente aprimorada por Bollobás e Erdős (1973) e por Chvatal e Szemerédi (1981), nas décadas seguintes.

Para o caso da exclusão de um grafo bipartido, Bondy e Simonovits apresentaram o seguinte resultado em 1974.

Teorema 2.0.2. *Se G é um grafo de ordem n com $100kn^{1+1/k}$ arestas, então este contém um ciclo de tamanho $2l$, C_{2l} , para todo inteiro $l \in [k, kn^{1/k}]$.*

Que pode ser interpretado como

$$ex(G, C_{2l}) \leq 90kn^{1+1/k},$$

para que G não possua tais ciclos, como sugerido por Füredi (1992).

No mesmo ano, Erdős e Spencer (1974 apud FÜREDI, 1992) obtiveram a seguinte cota inferior considerada a melhor cota possível obtida através de métodos probabilísticos.

$$ex(G, K_{t,t}) \geq \frac{n^{2-2/(t+1)}}{2}$$

Sendo melhorada por Ball e Pepe (2012) para o caso da exclusão de um $K_{s,t}$ com $t = 5$ e $5 \leq s \leq 12$, ou $t = 6$ e $6 \leq s \leq 8$.

Dez anos depois, em 1984, Erdős e Simonovits apresentam a seguinte cota para um grafo G qualquer que não possui H como subgrafo t -degenerado¹.

$$ex(G, H) = O(n^{2-1/t})$$

Wilf (1986) demonstrou a seguinte versão espectral para o resultado de Turán, proporcionando uma nova maneira de interpretar e solucionar tal problema.

Teorema 2.0.3. *Seja G um grafo de ordem n com número de clique igual a ω , então,*

$$\lambda(A) \leq \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) n.$$

Com igualdade válida se, e somente se, ω divide n .

¹ Ocorre se todo o subgrafo induzido de H possui um vértice com grau no máximo t .

Esta cota foi melhorada por [Nikiforov \(2007\)](#).

Em 1996 foi apresentada a seguinte cota que melhora (2.2).

$$z(m, n, s, t) \leq (s - t + 1)^{1/t} n m^{1-1/t} + t m^{2-2/t} + t n \quad (2.4)$$

Proposta por [Füredi \(1996a\)](#), utilizando o método de demonstração baseado em *Double Counting*², e considerando $m \geq s$, $n \geq t$, e $s \geq t \geq 1$, tinha o intuito de que quando limitada inferiormente fosse assintoticamente ótima para o caso proposto em ([BROWN, 1966](#)).

Motivado pela interpretação espectral do problema de Turán proposta por [Wilf \(1986\)](#), Barry [Guiduli](#) abordou o conceito de teoria espectral de grafos associado a problemas extremais clássicos em sua tese ([GUIDULI, 1996](#)) no ano de 1996. Dos resultados mais importantes de tal tese surgiu o artigo ([BABAI; GUIDULI, 2009](#)) em 2009, apresentando um resumo das cotas espectrais propostas por [Guiduli](#) para o problema de [Zarankiewicz](#). Dentre tais, destacamos a cota

$$\lambda(A) \leq ((s - 1)^{1/t} + O(1)) n^{1-1/t}. \quad (2.5)$$

Uma vez que, quando toma-se $t = 2$, esta é a melhor assintoticamente possível para todo s ([BABAI; GUIDULI, 2009](#)), de acordo com o resultado apresentado por [Füredi](#) em ([FÜREDI, 1996b](#)).

[Alon, Krivelevich e Sudakov](#), em 2003, aprimoraram o resultado proposto por [Erdős \(1964\)](#) e por [Erdős e Simonovits \(1984\)](#), mostrando que existe uma constante universal c , tal que para todo grafo H bipartido t -degenerado têm-se

$$ex(G, H) \leq c n^{2-1/t}.$$

No ano de 2005, [Fan Chung](#) publicou o artigo ([CHUNG, 2005](#)). Nele buscava generalizar a cota proposta por [Erdős e Stone \(1946\)](#) para um grafo G livre de qualquer grafo H com o uso de ferramentas espectrais. Especificamente, [Chung](#) interpretou o grafo por meio da matriz Laplaciana normalizada, e estudou quando seus autovalores não nulos estavam todos próximos a 1, a fim de mostrar que qualquer subgrafo H de G , que não possua uma cópia de K_{t+1} , possui $ex(G, H) \leq \left(1 - \frac{1}{t} + o(1)\right) e(G)$.

No mesmo ano, [Sudakov, Szabó e Vu](#) apresentaram uma generalização assintótica do problema de Turán. Precisamente mostram em ([SUDAKOV; SZABÓ; VU, 2005](#)) que, se todos os autovalores não triviais de um grafo G , k -regular com n vértices são pequenos o suficiente, então o maior subgrafo H de G , que não possui uma cópia de K_t , contém aproximadamente $\frac{t-2}{t-1}$ arestas de G .

² Método muito utilizado em combinatória para mostrar que duas expressões são equivalentes.

Em 2007, [Shi e Song](#) provaram a seguinte cota para o índice associado à matriz de adjacência de um grafo conexo G de ordem n e grau máximo Δ livre de $K_{2,t+1}$, considerando $0 \leq k \leq t \leq \Delta < n$:

$$\lambda(A) \leq \frac{k - t + \sqrt{(k - t)^2 + 4\Delta + 4t(n - t)}}{2}.$$

De forma que a igualdade é válida se, e somente se, G é $srg(n, \Delta, k, t)$.

[Nikiforov \(2007\)](#), apresentou o seguinte teorema, que melhora a cota apresentada acima.

Teorema 2.0.4. *Seja $t \geq k \geq 0$. Se G é um grafo de ordem n , grau máximo Δ e livre de $K_{2,t+1}$, então*

$$\lambda(A) \leq \min \left\{ \Delta, \frac{k - t + 1 + \sqrt{(k - t + 1)^2 + 4t(n - 1)}}{2} \right\}.$$

Se G é conexo, a igualdade vale se, e somente se, uma das condições abaixo é verdadeira:

- (i) $\Delta^2 - \Delta(k - t + 1) \leq t(n - 1)$ e G é Δ -regular.
- (ii) $\Delta^2 - \Delta(k - t + 1) > t(n - 1)$ e todo par de vértices de G tem k vizinhos em comum, se estes são adjacentes, e t vizinhos em comum, caso contrário.

Fazendo uso das ferramentas espectrais já propostas para a solução de tais problemas, [Nikiforov](#) publicou, em 2010, o artigo ([NIKIFOROV, 2010](#)) no qual demonstra as seguintes cotas.

- Para o número de Zarankiewicz

$$z(m, n, s, t) \leq (s - k - 1)^{1/t} n m^{1-1/t} + (t - 1) m^{1+k/t} + kn, \quad (2.6)$$

- Para o maior autovalor associado a um grafo G , que não possui $K_{s,t}$ como subgrafo

1. caso $t = 2$,

$$\lambda(A) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{(s - 1)(n - 1) + \frac{1}{4}}, \quad (2.7)$$

2. caso $t \geq 3$,

$$\lambda(A) \leq \frac{1}{2}(s - t + 1)^{1/t} n^{1-1/t} + (t - 1)n^{1-2/t} + t - 2. \quad (2.8)$$

Das quais, (2.6) melhora as cotas de Kövari, Sós e Turán e de Füredi. Basta tomar $k = 0$ para encontrar (2.2) e $k = t - 2$ para encontrar (2.4). Note, também que (2.7) e (2.8) melhoram a cota de Füredi, ao aplicar a desigualdade (1.16), ou seja,

$$ex(G, K_{s,2}) \leq \frac{n}{4} + \frac{n}{2} \sqrt{(s - 1)(n - 1) + \frac{1}{4}} \quad (2.9)$$

e

$$ex(G, K_{s,t}) \leq \frac{1}{2}(s-t+1)^{1/t}n^{2-1/t} + \frac{1}{2}(t-1)n^{2-2/t} + \frac{1}{2}(t-2)n. \quad (2.10)$$

Em (NIKIFOROV, 2010) é informado que (2.7) e (2.8) são justas para os casos $t = 2$ e $s \geq 2$, $s = t = 3$ e para $t \geq 2$ e $s \geq (t-1)! + 1$, como é possível ver a seguir.

$t = 2$	$s = 2$	Cota é justa e limitada inferiormente pelo grafo de polaridade de Erdős e Renyi ³ quando q é uma potência prima. Igualdade é válida para grafos “friendship” ⁴ .
	$s > 2$	$\lambda \geq \sqrt{sn} + O(n^{1/3})$ por Füredi (1996b). Igualdade válida para grafos fortemente regulares cujo par de vértices tem exatamente $s-1$ vizinhos em comum.
$t = 3$	$s = 3$	$\lambda \geq n^{2/3} + 2/3 n^{1/3} + c$ com $c > 0$ por Brown (1966) e Alon, Rónyai e Szabó (1999).
$t \geq 2$	$s \geq (t-1)! + 1$	$\lambda \geq n^{1-1/t} + O(n^{1-1/t-c})$ com $c > 0$ como consequência de (ALON; RÓNYAI; SZABÓ, 1999).

Tabela 1 – Ocorrência de justicidade para (2.7) e (2.8).

Em 2013, He, Jin e Zhang retomam o estudo do problema de Zarankiewicz com o artigo (HE; JIN; ZHANG, 2013), apresentado a seguinte cota superior para grafos livres de K_ω , onde ω corresponde ao número de clique do grafo em termos da matriz Laplaciana sem sinal, e considera-se $n = k\omega + r$, e $0 \leq r < \omega$:

$$\lambda(Q) \leq \frac{(3\omega - 4)k + 3r - 2 + \sqrt{k^2\omega^2 + [(2r + 4)\omega - 8r]k + (r - 2)^2}}{2}.$$

A igualdade da cota acima vale se, e somente se, G é um grafo bipartido completo para $\omega = 2$ e um grafo de Turán, $T(n, \omega)$, para $\omega \geq 3$.

No mesmo ano, Freitas, Nikiforov e Patuzzi (2013) mostraram que para um grafo G , livre de $K_{2,2}$, i.e., C_4 , e de ordem $n \geq 4$ o índice associado a G é limitado superiormente pelo índice de grafos “friendship” de ordem n , a menos que G seja igual ao tal grafo “friendship”.

Em 2015, Aharoni, Alon e Berger propuseram a seguinte cota espectral ao problema de Zarankiewicz, em termos da matriz Laplaciana do grafo G livre de $K_{1,t}$, considerando $a(\Delta, t)$ o número mínimo de arestas do grafo G de ordem Δ , que não possui conjunto independente de tamanho t :

$$\lambda(L) \leq 2\Delta - \frac{a(\Delta, t)}{\Delta - 1}.$$

⁴ Grafos construídos para satisfazer a cota inferior proposta por Erdős, Rényi e Sós (1966) e por Brown (1966).

⁴ Grafo obtido ao agrupar m cópias do ciclo C_3 em um vértice em comum.

No ano seguinte, de Freitas, Nikiforov e Patuzzi publicaram o artigo (FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016), e propuseram a seguinte conjectura ao problema da Zarankiewicz, considerando como representação espectral a matriz Laplaciana sem sinal.

Conjectura 2.0.2. *Seja $s \geq t - 1 \geq 1$ e n suficientemente grande. Se G é um grafo de ordem n livre de $K_{s+1,t}$, então*

$$\lambda(Q) \leq \frac{n}{2} + s + t - 2 + \frac{1}{2} \sqrt{(n - 2 + 2s)^2 - 8s(n - 2) + 4(t - 1)(n - t + 1)}. \quad (2.11)$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G é um “join” de um grafo K_{t-1} com um grafo s -regular de ordem $n - t + 1$.

Essa conjectura mostrou-se correta para $t = 2$ e $s = 1$ em (FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2013), e para $t = 2$ e $s \geq 1$ em (FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016).

Mais tarde, Kong e Wang (2016), propuseram a seguinte cota para um grafo G conexo de ordem n , grau máximo Δ , livre de $K_{2,t+1}$, considerando $1 < k \leq t < \Delta < n$:

$$\lambda(Q) \leq \frac{3\Delta + k - 2t + 1 + \sqrt{(3\Delta + k - 2t + 1)^2 + 16t(\Delta + n - 1)}}{4},$$

cuja igualdade é válida se, e somente se, G é $srg(n, \Delta, k, t)$. Mostrando-se precisa para grafos livres de $K_{2,t}$, quando tomar $k = t$.

No mesmo artigo, Kong e Wang apresentam a seguinte cota para $\lambda(Q)$, para o caso de G ser um grafo conexo de ordem $n \geq s + t$, livre de $K_{s,t}$, com $s \geq t \geq 3$:

$$\lambda(Q) \leq n + (s - t + 1)^{1/t} n^{1-1/t} + (t - 1)(n - 1)^{1-3/t} + t - 3.$$

Motivados pela busca de uma solução aos problemas propostos, e pela expansão que a teoria espectral de grafos vem ganhando nos últimos anos, no próximo capítulo enunciaremos, com mais detalhes, algumas cotas espectrais aqui mencionadas. Com isso buscamos uma maior compreensão e domínio de ferramentas espectrais a fim de, no futuro, apresentar uma solução exata ou o mais justa possível a tais problemas, especialmente aos associados à matriz Laplaciana normalizada que, como é possível observar nesta revisão histórica, é brevemente abordada. —————

3 Cotas espectrais abordadas

Neste capítulo, abordaremos algumas cotas espectrais associadas à matriz de adjacência, Laplaciana, Laplaciana sem sinal e Laplaciana normalizada. Iniciamos com a apresentação da cota associada à matriz de adjacência proposta por Babai e Guiduli (2009), que melhora a cota de Kóvari, Sós e Turán (1954). Daremos continuidade com as cotas propostas por Nikiforov (2010), que melhoram a cota de Füredi (1996a). Tratamos, também a cota associada à matriz Laplaciana, fruto do estudo de Aharoni, Alon e Berger (2015), seguida pelas cotas associadas a matriz Laplaciana sem sinal propostas por Freitas, Nikiforov e Patuzzi (2016).

Por fim, apresentamos uma revisão sobre os resultados propostos em (CHUNG, 2005) para o problema de Turán. Uma vez que não foram encontrados, até o presente momento, resultados ao problema de Zarankiewicz utilizando a matriz Laplaciana normalizada. Acredita-se que este resultado não foi alcançado até o momento, pois como Butler (2016) menciona, apesar de tratar de grafos simples ser útil combinatorialmente, em alguns casos é melhor trabalhar no contexto mais amplo, utilizando grafos com peso.

3.1 Resultados para matriz de adjacência

Nesta seção serão abordados resultados referentes às cotas para o índice associado à matriz de adjacência de um grafo G com n vértices e que não possui um grafo bipartido completo $K_{s,t}$ como subgrafo.

Apresentamos a seguir o principal teorema de (BABAI; GUIDULI, 2009), o qual está associado à matriz de adjacência e concede uma cota mais precisa que a proposta por Kóvari, Sós e Turán (1954).

Teorema 3.1.1. (BABAI; GUIDULI, 2009, Teorema 3) *Seja G um grafo de ordem n , livre de $K_{s,t}$, com raio espectral $\lambda(A)$. Se $2 \leq t \leq s$, então*

$$\lambda(A) \leq ((s-1)^{1/t} + o(1))n^{1-1/t} \quad (3.1)$$

com $o(1)$ para s e t fixos enquanto $n \rightarrow \infty$.

Quando fixamos $t = 2$, (3.1.1) torna-se a melhor assintoticamente possível. Isso nos conduz a enunciar, e posteriormente demonstrar o teorema a seguir, proposto em (BABAI; GUIDULI, 2009).

Teorema 3.1.2. (BABAI; GUIDULI, 2009, Teorema 4) *Seja G um grafo com n vértices livres de $K_{s,2}$ e $\lambda(A)$ o raio espectral associado à matriz de adjacência de G . Dado $s \geq 2$*

temos que

$$\lambda(A) \leq (s-1)^{1/2}n^{1/2} + O((ns)^{1/4}).$$

Buscando cotas mais justas Nikiforov, em (NIKIFOROV, 2010), propôs duas novas cotas ao problema de Zarankiewicz. A primeira é enunciada a seguir resultando em uma cota nos mesmos termos das propostas em (FÜREDI, 1996a) e (KÓVARI; SÓS; TURÁN, 1954).

Teorema 3.1.3. (NIKIFOROV, 2010, Teorema 2) *Se $s \geq 2$ e $t \geq 2$, então para todo $0 \leq k \leq s-2$ tem-se*

$$z(m, n, s, t) \leq (s-k-1)^{1/t}nm^{1-1/t} + (t-1)m^{1+k/t} + kn. \quad (3.2)$$

A segunda é obtida da reescrita do Teorema 3.1.3 através de conceitos de teoria de grafos, a fim de buscar uma melhora nas cotas por meio de uma abordagem diferenciada do problema.

Teorema 3.1.4. (NIKIFOROV, 2010, Teorema 4) *Seja $s \geq 2$, $t \geq 2$, $0 \leq k \leq s-2$, e seja $G = G(X, Y, E)$ um grafo bipartido com partições X e Y . Suponha que G não possua cópia de $K_{s,t}$ com s vértices em X e t vértices em Y . Então,*

$$ex(G, K_{s,t}) \leq (s-k-1)^{1/t}|Y||X|^{1-1/t} + (t-1)|X|^{1+k/t} + k|Y|. \quad (3.3)$$

Como consequência dos Teoremas 3.1.3 e 3.1.4, e do fato que se m e n são iguais, basta tomar $k = \min\{s, t\} - 2$ a fim de melhorar a cota para n grande o suficiente. Como é possível ver no teorema a seguir, proposto em (NIKIFOROV, 2010).

Teorema 3.1.5. (NIKIFOROV, 2010, Teorema 1) *Seja $s \geq t \geq 2$, G um grafo livre de $K_{s,t}$ de ordem n e raio espectral $\lambda(A)$.*

Se $t = 2$

$$\lambda(A) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{(s-1)(n-1) + \frac{1}{4}} \quad (3.4)$$

Se $t \geq 3$

$$\lambda(A) \leq \frac{1}{2}(s-t+1)^{1/t}n^{1-1/t} + (t-1)n^{1-2/t} + t - 2. \quad (3.5)$$

Este, como consta em (NIKIFOROV, 2010), fornece uma cota mais justa ao problema de Zarankiewicz, em particular à $ex(G, K_{s,t})$, ao ser utilizado acoplado à desigualdade

$$\frac{2ex(G, H)}{n} \leq \lambda(A).$$

3.2 Resultados para matriz Laplaciana

Aqui apresentamos a cota proposta por [Aharoni, Alon e Berger \(2015\)](#) para o índice da matriz Laplaciana associada a um grafo G livre de $K_{1,t}$.

Teorema 3.2.1. ([AHARONI; ALON; BERGER, 2015](#), Teorema 1.1) *Seja G um grafo livre de $K_{1,t}$, com Δ seu grau máximo. Seja $a(\Delta, t) = \min\{e(G) : G, \text{ grafo de ordem } \Delta, \text{ que não possui conjunto independente de tamanho } t\}$. Então,*

$$\lambda(L) \leq 2\Delta - \frac{a(\Delta, t)}{\Delta - 1}. \quad (3.6)$$

A fim de melhorar este resultado, [Aharoni, Alon e Berger \(2015\)](#) notaram que se G não possui conjunto independente de tamanho t , \overline{G} não possui uma cópia de K_t . Pelo Teorema 1.3.1 vale

$$ex(\overline{G}, K_t) \leq e(\overline{T}(\Delta, t)).$$

Uma vez que $a(\Delta, t) = \min\{e(G) : G, \text{ grafo de ordem } \Delta, \text{ que não possui conjunto independente de tamanho } t\}$ e que $e(G)$ pode ser reescrito como a subtração entre o número de arestas do grafo completo de grau Δ e $ex(\overline{G}, K_t)$ segue que

$$\begin{aligned} a(\Delta, t) &= \min \left\{ \binom{\Delta}{2} - ex(\overline{G}, K_t) \right\} \\ &= \binom{\Delta}{2} - \max\{ex(\overline{G}, K_t)\}. \end{aligned}$$

Mas, $\max\{ex(\overline{G}, K_t)\} = e(\overline{T}(\Delta, t))$, como visto acima. Portanto,

$$\begin{aligned} a(\Delta, t) &= \binom{\Delta}{2} - e(\overline{T}(\Delta, t)) \\ &\approx \frac{\Delta(\Delta - 1)}{2} - \binom{t-1}{2} \left(\frac{\Delta}{t-1}\right)^2 \\ &\approx \frac{\Delta^2}{2} - \frac{\Delta}{2} - \frac{(t-2)\Delta^2}{2(t-1)} \\ &\approx (1 + o(1)) \frac{\Delta^2}{2t-2} \end{aligned}$$

com $o(1) \rightarrow 0$ e $\Delta \rightarrow \infty$.

Note que, para valores grandes de Δ o Teorema 3.2.1 garante a seguinte cota superior

$$\lambda(L) \leq \left(2 - \frac{1}{2t-2} + o(1)\right) \Delta.$$

3.3 Resultados para matriz Laplaciana sem sinal

Nesta seção apresentaremos os resultados encontrados em (FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016) para cotas do índice da matriz Laplaciana sem sinal, associada a um grafo livre de $K_{s,t}$. Primeiramente enunciaremos a conjectura proposta por Freitas, Nikiforov e Patuzzi (2016), cuja demonstração encontra-se em aberto, uma vez que atualmente não existem ferramentas práticas e teóricas para determinação de um contraexemplo, ou de sua prova.

Conjectura 3.3.1. (FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016, Conjectura 4) *Seja $s \geq t - 1 \geq 1$ e n suficientemente grande. Se G é um grafo de ordem n livre de $K_{s+1,t}$, então*

$$\lambda(Q) \leq \frac{n}{2} + s + t - 2 + \frac{1}{2} \sqrt{(n - 2 + 2s)^2 - 8s(n - 2) + 4(t - 1)(n - t + 1)}. \quad (3.7)$$

a igualdade ocorre se, e somente se, G é um “join” de um grafo K_{t-1} com um grafo s -regular de ordem $n - t + 1$.

Tal conjectura foi mostrada verdadeira para certos valores de s e t . Na Proposição 2 de (FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2013), é possível observá-la ao fixar $s = 1$ e $t = 2$, assim como no próximo caso, apresentado por Freitas, Nikiforov e Patuzzi (2016), que considera $t = 2$ e $s \geq 1$.

Teorema 3.3.1. (FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016, Teorema 5) *Seja $s \geq 1$ e $n \geq s^2 + 6s + 6$. Se G é um grafo de ordem n livre de $K_{s+1,2}$, então*

$$\lambda(Q) \leq \frac{n + 2s}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(n - 2s)^2 + 8s}. \quad (3.8)$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G é um “join” de um grafo K_1 com um grafo s -regular de ordem $n - 1$.

A fim de divulgar a demonstração do Teorema 3.3.1, faz-se necessário dividi-lo em uma proposição e um teorema - que terão suas provas apresentadas no Capítulo 4 - uma vez que, dessa forma, a demonstração apresenta-se de forma mais clara e concisa ao leitor. Note que, esta estrutura de prova pode ser conveniente a uma futura demonstração da Conjectura 3.3.1.

Do artigo (FREITAS et al., 2010), sobre famílias infinitas de grafos q -inteiros, sabe-se que o “join” de um vértice (aqui denotado como K_1) com um grafo de grau máximo limitado, nesse caso s -regular de ordem $n - 1$, garante que

$$\lambda(Q) = \frac{n + 2s}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(n - 2s)^2 + 8s}. \quad (3.9)$$

Tal resultado pode ser expandido ao considerar H um grafo de ordem $n - 1$ com $\Delta(H) \leq s$ e $G = K_1 \vee H$. Como é possível observar na seguinte proposição.

Proposição 3.3.1. (*FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016, Proposição 6*) Seja $s \geq 1$, H um grafo de ordem $n - 1$, e G o “join” entre K_1 e H . Se $\Delta(H) \leq s$, então

$$\lambda(Q) \leq \frac{n + 2s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(n - 2s)^2 + 8s}, \quad (3.10)$$

com igualdade se, e somente se, H é s -regular.

No enunciado da Proposição 3.3.1 as condições para H , um grafo de ordem $n - 1$ com $\Delta(H) \leq s$ e $G = K_1 \vee H$, garantem que o grafo G tenha ordem n , grau máximo $n - 1$ e que seja livre de $K_{s+1,2}$. Nos conduzindo ao seguinte teorema, que terá sua demonstração omitida, uma vez que segue diretamente da Proposição 3.3.1.

Teorema 3.3.2. (*FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016, Teorema 7*) Seja $s \geq 1$, G um grafo de ordem n com $\Delta(G) = n - 1$. Se G é livre de $K_{s+1,2}$, então

$$\lambda(Q) \leq \frac{n + 2s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(n - 2s)^2 + 8s}. \quad (3.11)$$

A igualdade vale se, e somente se, G é s -regular.

Completando a separação do Teorema 3.3.1 em outros dois, e mostrando que se a condição $\Delta(G) = n - 1$ for relaxada pode-se melhorar a cota proposta para $\lambda(Q)$, enunciaremos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.3. (*FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016, Teorema 8*) Seja $s \geq 1$, $n \geq s^2 + 6s + 6$, e G um grafo de ordem n com $\Delta(G) < n - 1$. Se G é livre de $K_{s+1,2}$, então

$$\lambda(Q) < n. \quad (3.12)$$

Ressalvamos que no Capítulo 4 encontram-se detalhadas as demonstrações da Proposição 3.3.1 e do Teorema 3.3.3, as quais compõem a demonstração do Teorema 3.3.1.

3.4 Resultados para matriz Laplaciana normalizada

Apresentamos, a seguir, a generalização proposta por Chung (2005) para a cota (1.17), através de sua interpretação espectral utilizando a matriz Laplaciana normalizada, e o estudo da limitação superior da discrepância¹ em termos dos autovalores de tal matriz.

Primeiramente define-se a família de grafos \mathcal{F}_δ cujos autovalores Laplacianos normalizados satisfazem

$$\bar{\lambda} = \max_{i \neq n} |1 - \lambda_i(\mathcal{L})| < \delta. \quad (3.13)$$

No exemplo a seguir, apresentamos como é definida a família de grafos k -regulares.

¹ Diferença entre a quantidade atual e o valor esperado.

Exemplo 3.4.1. *Seja G um grafo k -regular, logo a matriz Laplaciana normalizada associada a este grafo pode ser escrita como*

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= D^{-1/2}LD^{-1/2} \\ &= I - D^{-1/2}AD^{-1/2} \\ &= I - \frac{A}{k}.\end{aligned}$$

Em particular, $A = k(I - \mathcal{L})$. Logo os autovalores associados à matriz de adjacência de G são dados da seguinte forma: $\lambda_i(A) = k(1 - \lambda_i(\mathcal{L}))$. Portanto,

$$\bar{\lambda} < \max_{i \neq n} |\lambda_i(A)| = \max_{i \neq n} |k(1 - \lambda_i(\mathcal{L}))| < k\delta.$$

Assim, a família composta por grafos k -regulares é a família \mathcal{F}_δ com $\delta = \frac{\bar{\lambda}}{k}$.

A partir de tal definição, apresentamos abaixo o principal teorema proposto por [Chung \(2005\)](#).

Teorema 3.4.1. ([CHUNG, 2005, Teorema 1](#)) *Seja G um grafo com n vértices, $\lambda_1(\mathcal{L}) \geq \dots \geq \lambda_n(\mathcal{L}) = 0$ os autovalores associados a sua matriz Laplaciana normalizada, com*

$$\bar{\lambda} = \max_{i \neq n} |1 - \lambda_i(\mathcal{L})|$$

satisfazendo

$$\bar{\lambda} = o\left(\frac{1}{\text{vol}_{-2t+3}(G)\text{vol}(G)^{t-2}}\right). \quad (3.14)$$

Então, G é um grafo de Turán para $t \geq 2$, ou seja, qualquer subgrafo de G livre de K_{t+1} tem no máximo

$$\left(1 - \frac{1}{t} + o(1)\right) e(G) \quad (3.15)$$

arestas.

Tal teorema é um caso mais geral da cota proposta por Erdős-Stone-Simonovits em ([ERDÖS; SIMONOVITS, 1966; ERDÖS; STONE, 1946](#)), e não será demonstrado uma vez que foge ao escopo deste trabalho. No entanto, as ferramentas usadas em sua prova foram estudadas, a fim de buscar inspiração para solucionar o problema de Zarankiewicz associado à matriz Laplaciana normalizada. Tais ferramentas são apresentadas no Apêndice [C](#) desta dissertação.

Apresentamos, a seguir, dois corolários deste teorema. O primeiro é equivalente à cota de Erdős-Stone-Simonovits e o segundo refere-se a grafos k -regulares. Ambos serão demonstrados no [Capítulo 4](#).

Corolário 3.4.1. ([CHUNG, 2005, Corolário 1](#)) *Seja G um grafo completo com n vértices e livre de K_{t+1} , então este possui no máximo*

$$\left(1 - \frac{1}{t} + o(1)\right) \frac{n^2}{2}$$

arestas.

Corolário 3.4.2. (*CHUNG, 2005, Corolário 2*) Seja G um grafo k -regular com n vértices, então a igualdade (3.14) se reduz a

$$\bar{\lambda} = o\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{t-1}\right).$$

Além disso, qualquer subgrafo de G livre de K_{t+1} tem no máximo

$$\left(1 - \frac{1}{t} + o(1)\right) \frac{kn}{2}$$

arestas.

4 Demonstrações das cotas espectrais abordadas

Neste capítulo serão apresentadas as demonstrações para os respectivos teoremas, proposições e corolários enunciados no Capítulo 3: Teoremas 3.1.2, 3.1.3, 3.1.5, 3.2.1, 3.3.3, Propriedade 3.3.1, e Corolários 3.4.1 e 3.4.2.

4.1 Demonstração para o Teorema 3.1.2

A seguir será demonstrado que

$$\lambda(A) \leq (s-1)^{1/2}n^{1/2} + 2^{-3/4}(s-1)^{1/4}n^{1/4} + 2^{-1/2},$$

uma vez que o termo $2^{-3/4}(s-1)^{1/4}n^{1/4} + 2^{-1/2}$ é da ordem de $O((ns)^{1/4})$.

Demonstração

Tomando $D = (2(s-1)n)^{1/2}$, divide-se os vértices de G nos seguintes conjuntos

$$U = \{i \in V : d(i) > D\} \text{ e } W = V \setminus D$$

tal que $|U| = u$ e $|W| = n - u$.

Afirma-se que

$$|U| \leq \frac{D}{s-1}.$$

A fim de mostrar que esta afirmação é verdadeira, supõem-se que os vértices de G que estão em U são nomeados da seguinte maneira $U = \{1, 2, \dots, u\}$. Define-se $\Gamma(i) \subset V$ o conjunto dos vértices vizinhos a i . Temos que tal que $|\Gamma(i) \cap \Gamma(j)| \leq s-1$ para todo i e $j \in V$, pois, por hipótese, G é livre de $K_{s,2}$.

Note que a união de m conjuntos $\Gamma(i)$ deve conter, no mínimo,

$$f(m) = D + (D - (s-1)) + \dots + (D - (m-1)(s-1))$$

elementos, com $f(m) \leq n$, pois n é o número de vértices em G . Desta forma $f(m)$ acaba por ser definida como uma progressão aritmética finita, cuja soma de seus termos é

$$f(m) = \frac{(D + D - (m-1)(s-1))m}{2} = \frac{m}{2}(2D - (m-1)(s-1)).$$

Notemos que esta expressão pode ser interpretada como uma função quadrática que assume máximo em $D + \frac{s-1}{2}$.

Vamos mostrar que

$$f\left(\frac{D}{s-1}\right) > n.$$

Note que

$$f\left(\frac{D}{s-1}\right) = \frac{D}{2(s-1)} \left[2D - \left(\frac{D}{s-1} - 1\right)(s-1) \right],$$

que pode ser simplificada através dos seguintes passos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{D}{s-1}\right) &= \frac{D}{2(s-1)} [2D - (D - (s-1))] \\ &= \frac{D}{2(s-1)} (D + s - 1). \end{aligned}$$

Supondo, por contradição, que $f\left(\frac{D}{s-1}\right) < n$, olhemos para

$$\frac{D}{2(s-1)} (D + s - 1) < n.$$

Uma vez operando sobre esta desigualdade, e utilizando o fato de que $D^2 = 2(s-1)n$ contradiz-se a hipótese de que $s \geq 2$, como é possível observar nos passos a seguir.

$$\begin{aligned} D^2 + D(s-1) &< 2(s-1)n \\ D^2 + D(s-1) &< D^2 \\ D + s - 1 &< D \\ s - 1 &< 0 \\ s &< 1. \end{aligned}$$

Conclui-se, portanto

$$f\left(\frac{D}{s-1}\right) > n,$$

ou seja,

$$u \leq \frac{D}{s-1} \tag{4.1}$$

como desejava-se mostrar.

Visto isso podemos começar a demonstração que resultará na prova do resultado desejado. Note que

$$\lambda(A)^2 \sum_i x_i^2 = \sum_i (\lambda(A)x_i)^2. \tag{4.2}$$

Pela definição de autovalor e autovetor temos que $\lambda(A)\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, logo usando este fato em (4.2), obtemos

$$\lambda(A)^2 \sum_i x_i^2 = \sum_i \left[\sum_j a_{i,j} x_j \right]^2 = \sum_i \sum_{i \sim j} x_j^2.$$

Em particular,

$$\lambda(A)^2 \sum_i x_i^2 = \sum_i d(i)x_i^2 + \sum_{i \neq j} d(i,j)x_i x_j. \tag{4.3}$$

Usando (4.3) e o fato de que $d(i, j) < s - 1$, por G ser livre de $K_{s,2}$, temos

$$\lambda(A)^2 \sum_i x_i^2 < \sum_i d(i)x_i^2 + (s-1) \sum_{i \neq j} x_i x_j. \quad (4.4)$$

Pelo fato de que podemos separar os vértices do grafo G em dois subconjuntos U e W , definidos acima, conclui-se que

$$\sum_i d(i)x_i^2 = \sum_{i \in U} d(i)x_i^2 + \sum_{i \in W} d(i)x_i^2 \leq n \sum_{i \in U} x_i^2 + D \sum_i x_i^2 \quad (4.5)$$

e

$$\sum_{i \neq j} x_i x_j = \sum_{\substack{i,j \in U \\ i \neq j}} x_i x_j + \sum_{\substack{i,j \in W \\ i \neq j}} x_i x_j + 2 \sum_{i \in U} x_i \sum_{i \in W} x_i. \quad (4.6)$$

Em particular, para todo $Y \subset V$, podemos reescrever

$$\sum_{\substack{i,j \in Y \\ i \neq j}} x_i x_j = \sum_{i,j \in Y} x_i x_j - \sum_{i \in Y} x_i^2,$$

portanto, a igualdade (4.6) pode ser entendida como

$$\sum_{i \neq j} x_i x_j = \sum_{i,j \in U} x_i x_j - \sum_{i \in U} x_i^2 + \sum_{i,j \in W} x_i x_j - \sum_{i \in W} x_i^2 + 2 \sum_{i \in U} x_i \sum_{i \in W} x_i.$$

Usando a desigualdade (B.2) na igualdade acima obtêm-se

$$\sum_{i \neq j} x_i x_j \leq (|U| - 1) \sum_{i \in U} x_i^2 + (|W| - 1) \sum_{i \in W} x_i^2 + 2 \sum_{i \in U} x_i \sum_{i \in W} x_i. \quad (4.7)$$

Ainda usando a desigualdade (B.2), temos que

$$\sum_{i \in U} x_i \sum_{i \in U} x_i \leq |U| \sum_{i \in U} x_i^2$$

e

$$\sum_{i \in W} x_i \sum_{i \in W} x_i \leq |W| \sum_{i \in W} x_i^2.$$

Em particular,

$$\sum_{i \in U} x_i \sum_{i \in U} x_i \sum_{i \in W} x_i \sum_{i \in W} x_i \leq |U| \sum_{i \in U} x_i^2 |W| \sum_{i \in W} x_i^2$$

pode ser reescrita como

$$\sum_{i \in U} x_i \sum_{i \in W} x_i \sum_{i \in U} x_i \sum_{i \in W} x_i \leq |U||W| \sum_{i \in U} x_i^2 \sum_{i \in W} x_i^2.$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i \in U} x_i \sum_{i \in W} x_i \right]^2 &\leq |U||W| \sum_{i \in U} x_i^2 \sum_{i \in W} x_i^2 \\ \sum_{i \in U} x_i \sum_{i \in W} x_i &\leq \left[|U||W| \sum_{i \in U} x_i^2 \sum_{i \in W} x_i^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Usando (4.8) em (4.7) obtêm-se

$$\sum_{i \neq j} x_i x_j \leq (|U| - 1) \sum_{i \in U} x_i^2 + (|W| - 1) \sum_{i \in W} x_i^2 + 2 \left[|U||W| \sum_{i \in U} x_i^2 \sum_{i \in W} x_i^2 \right]^{1/2}$$

que pode ser entendida como,

$$\sum_{i \neq j} x_i x_j \leq |U| \sum_{i \in U} x_i^2 + |W| \sum_{i \in W} x_i^2 + 2 \left[|U||W| \sum_{i \in U} x_i^2 \sum_{i \in W} x_i^2 \right]^{1/2}.$$

Uma vez que, $|U| = u$ e $|W| = n$ tem-se

$$\sum_{i \neq j} x_i x_j \leq u \sum_{i \in U} x_i^2 + n \sum_{i \in W} x_i^2 + 2 \left[un \sum_{i \in U} x_i^2 \sum_{i \in W} x_i^2 \right]^{1/2}. \quad (4.9)$$

Note que,

$$4 \sum_{i \in U} x_i^2 \sum_{i \in W} x_i^2 \leq \left[\sum_i x_i^2 \right]^2,$$

em particular

$$2 \left[\sum_{i \in U} x_i^2 \sum_{i \in W} x_i^2 \right]^{1/2} \leq \sum_i x_i^2.$$

Usando esta última desigualdade em (4.9) obtemos

$$\sum_{i \neq j} x_i x_j \leq u \sum_{i \in U} x_i^2 + n \sum_{i \in W} x_i^2 + \sqrt{un} \sum_i x_i^2,$$

em particular

$$\sum_{i \neq j} x_i x_j \leq u \sum_i x_i^2 + n \sum_{i \in W} x_i^2 + \sqrt{un} \sum_i x_i^2. \quad (4.10)$$

Aplicando as limitantes obtidas em (4.5) e em (4.10) na desigualdade (4.4) obtêm-se

$$\lambda(A)^2 \sum_i x_i^2 \leq n \sum_{i \in U} x_i^2 + D \sum_i x_i^2 + (s - 1) \left[u \sum_i x_i^2 + n \sum_{i \in W} x_i^2 + \sqrt{un} \sum_i x_i^2 \right]. \quad (4.11)$$

Note que

$$n \left(\sum_{i \in U} x_i^2 + (s - 1) \sum_{i \in W} x_i^2 \right) < n(s - 1) \left(\sum_{i \in U} x_i^2 + \sum_{i \in W} x_i^2 \right) = n(s - 1) \sum_i x_i^2,$$

e a desigualdade (4.11) pode ser reescrita como

$$\lambda(A)^2 \sum_i x_i^2 \leq n(s - 1) \sum_i x_i^2 + D \sum_i x_i^2 + (s - 1) \left[u \sum_i x_i^2 + \sqrt{un} \sum_i x_i^2 \right].$$

Sendo simplificada para

$$\lambda(A)^2 \leq n(s - 1) + D + (s - 1)u + (s - 1)\sqrt{un}.$$

Aplicando a desigualdade (4.1), provada no início desta demonstração, na desigualdade acima têm-se

$$\lambda(A)^2 \leq (s-1)n + 2D + \sqrt{Dn(s-1)}.$$

Entretanto, por definição $D = (2(s-1)n)^{1/2}$, logo

$$\begin{aligned} \lambda(A)^2 &\leq (s-1)n + 2^{3/2}(s-1)^{1/2}n^{1/2} + 2^{1/4}(s-1)^{3/4}n^{3/4} \\ &\leq ((s-1)^{1/2}n^{1/2} + 2^{-3/4}(s-1)^{1/4}n^{1/4} + 2^{-1/2})^2, \end{aligned}$$

portanto

$$\lambda(A) \leq (s-1)^{1/2}n^{1/2} + 2^{-3/4}(s-1)^{1/4}n^{1/4} + 2^{-1/2}. \quad (4.12)$$

como desejava-se mostrar. \square

4.2 Demonstração para o Teorema 3.1.3

Nesta seção buscamos apresentar a demonstração ao Teorema 3.1.3. Antes de prosseguirmos, será necessário considerar a seguinte notação, com a finalidade de compreender melhor a demonstração do teorema.

Seja \mathcal{A} uma matriz binária, de tamanho $m \times n$, cujos elementos são denotados por $\alpha_{i,j}$. Indexemos as linhas e colunas da matriz \mathcal{A} pelos elementos de dois conjuntos disjuntos $R(\mathcal{A})$ e $C(\mathcal{A})$, tal que para qualquer $l_i \in R(\mathcal{A})$, e $b_j \in C(\mathcal{A})$ tem-se

$$C_i = \{j : b_j \in C(\mathcal{A}), \alpha_{i,j} = 1\} \text{ e } r_i = |C_i|,$$

e

$$R_j = \{i : l_i \in R(\mathcal{A}), \alpha_{i,j} = 1\} \text{ e } c_j = |R_j|.$$

Dados conjuntos não vazios $I \subset R(\mathcal{A})$ e $J \subset C(\mathcal{A})$ obtemos a submatriz $\mathcal{A}[I, J]$ com entradas $\alpha'_{p,q} = \alpha_{i,j}$ satisfazendo $l_i \in I$ e $b_j \in J$. Apresentamos, a seguir, um exemplo aplicado desta notação.

Exemplo 4.2.1. *Considere a seguinte matriz \mathcal{A} e os conjuntos que indexam suas linhas e colunas $R(\mathcal{A}) = \{l_1, l_2, l_3\}$ e $C(\mathcal{A}) = \{b_1, b_2, b_3\}$, respectivamente.*

$$\mathcal{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (4.13)$$

Logo,

$$C_1 = \{j : b_j \in C(\mathcal{A}), \alpha_{1,j} = 1\} = \{1, 2, 3\} \text{ e } r_1 = 3$$

e

$$R_1 = \{i : l_i \in R(\mathcal{A}), \alpha_{i,1} = 1\} = \{1, 3\} \text{ e } c_1 = 2$$

seguinte analogamente para os demais.

Se tomarmos, por exemplo, $I = \{l_1, l_3\}$ e $J = \{b_2, b_3\}$, a submatriz $\mathcal{A}[I, J]$ será a seguinte

$$\mathcal{A}[I, J] = \begin{matrix} & b_2 & b_3 \\ \begin{matrix} l_1 \\ l_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (4.14)$$

Considerando esta notação, prosseguimos para a desejada demonstração do teorema, a qual seguirá o método de indução ao invés do tradicional método de *Double counting*, assim como no artigo (NIKIFOROV, 2010).

Demonstração

Por indução em k , para $k = 0$ obtêm-se a desigualdade fornecida por Kóvari, Sós e Turán (1954).

Supondo que \mathcal{A} não possui $J_{s,t}$ como submatriz, que $1 \leq k \leq s - 2$, e assumindo que (3.2) é válida para todo $k' < k$, será mostrado que

$$\|\mathcal{A}\| \leq (s - k - 1)^{1/t} nm^{1-1/t} + (t - 1)m^{1+k/t} + kn. \quad (4.15)$$

Tomamos $l_i \in R(\mathcal{A})$ e definimos os conjuntos $U = R(\mathcal{A}) \setminus \{l_i\}$ e $W = C_i$. Olhemos para a matriz $\mathcal{A}[U, W]$. Note que esta não possui uma submatriz $J_{s-1,t}$ de entradas unitárias, pois se possuísse a matriz \mathcal{A} teria uma submatriz $J_{s,t}$, o que contradiz a hipótese do teorema. Portanto,

$$\|\mathcal{A}[U, W]\| \leq z(|U|, |W|, s - 1, t).$$

Pelo argumento de indução aplicado em $s - 1$ e $k - 1$ temos

$$\|\mathcal{A}[U, W]\| \leq (s - k - 1)^{1/t} |W| |U|^{1-1/t} + (t - 1) |U|^{1+(k-1)/t} + (k - 1) |W|.$$

Usando os fatos de que $|W| = r_i$ e $|U| = m - 1$, devido ao modo como os conjuntos foram tomados acima, e pelo fato da ordem de \mathcal{A} ser $m \times n$, e por $m - 1 < m$ obtêm-se

$$\|\mathcal{A}[U, W]\| \leq (s - k - 1)^{1/t} r_i m^{1-1/t} + (t - 1) m^{1+(k-1)/t} + (k - 1) r_i. \quad (4.16)$$

Do fato que

$$\|\mathcal{A}\| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{i,j},$$

para $\mathcal{A}[U, W]$ temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}[U, W]\| &= \sum_{j \in \mathcal{C}_i} \sum_{\substack{1 \leq \kappa \leq m \\ \kappa \neq i}} \alpha_{\kappa, j} \\
&= \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_{i, j} \sum_{\substack{1 \leq \kappa \leq m \\ \kappa \neq i}} \alpha_{\kappa, j} \\
&= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq \kappa \leq m} \alpha_{i, j} \alpha_{\kappa, j} - \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_{i, j} \\
&= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq \kappa \leq m} \alpha_{i, j} \alpha_{\kappa, j} - r_i.
\end{aligned}$$

Usando esta igualdade em (4.16), vemos que

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq \kappa \leq m} \alpha_{i, j} \alpha_{\kappa, j} - r_i \leq (s - k - 1)^{1/t} r_i m^{1-1/t} + (t - 1) m^{1+(k-1)/t} + (k - 1) r_i.$$

Simplificando

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq \kappa \leq m} \alpha_{i, j} \alpha_{\kappa, j} \leq [(s - k - 1)^{1/t} m^{1-1/t} + k] r_i + (t - 1) m^{1+(k-1)/t},$$

e reescrevendo tem-se

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq \kappa \leq m} \alpha_{i, j} \alpha_{\kappa, j} - [(s - k - 1)^{1/t} m^{1-1/t} + k] r_i - (t - 1) m^{1+(k-1)/t} \leq 0. \quad (4.17)$$

Somando a desigualdade (4.17) para todas as linhas de \mathcal{A}

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq m} \left[\sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq \kappa \leq m} \alpha_{i, j} \alpha_{\kappa, j} - [(s - k - 1)^{1/t} m^{1-1/t} + k] r_i - (t - 1) m^{1+(k-1)/t} \right] &\leq 0 \\
\sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq \kappa \leq m} \alpha_{i, j} \alpha_{\kappa, j} - [(s - k - 1)^{1/t} m^{1-1/t} + k] \sum_{1 \leq i \leq m} r_i - (t - 1) m m^{1+(k-1)/t} &\leq 0 \\
\sum_{\substack{1 \leq i, \kappa \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \alpha_{i, j} \alpha_{\kappa, j} - [(s - k - 1)^{1/t} m^{1-1/t} + k] \|\mathcal{A}\| - (t - 1) m^{2+(k-1)/t} &\leq 0. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Note que,

$$\sum_{\substack{1 \leq i, \kappa \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \alpha_{i, j} \alpha_{\kappa, j} = \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i, \kappa \leq m} \alpha_{i, j} \alpha_{\kappa, j} = \sum_{1 \leq j \leq n} c_j^2 \geq \frac{\|\mathcal{A}\|^2}{n}.$$

Substituindo esta última desigualdade em (4.18) obtêm-se

$$\frac{\|\mathcal{A}\|^2}{n} - [(s - k - 1)^{1/t} m^{1-1/t} + k] \|\mathcal{A}\| - (t - 1) m^{2+(k-1)/t} \leq 0,$$

e resolvendo esta inequação para $\|\mathcal{A}\|$, e buscando a limitante superior, apenas têm-se

$$\|\mathcal{A}\| \leq \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4(t - 1) m^{2+(k-1)/t}}{n[(s - k - 1)^{1/t} m^{1-1/t} + k]^2}} \right] \frac{n[(s - k - 1)^{1/t} m^{1-1/t} + k]}{2}.$$

Limitando o radical usando o fato que $(1+x)^r \geq 1+rx$ para um número $x \geq 1$ e para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, (*desigualdade de Bernoulli*), temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\| &\leq \left[1 + 1 + \frac{2(t-1)m^{2+(k-1)/t}}{n[(s-k-1)^{1/t}m^{1-1/t} + k]^2} \right] \frac{n[(s-k-1)^{1/t}m^{1-1/t} + k]}{2} \\ &= (s-k-1)^{1/t}nm^{1-1/t} + kn + \frac{(t-1)m^{2+(k-1)/t}}{(s-k-1)^{1/t}m^{1-1/t} + k} \\ &\leq (s-k-1)^{1/t}nm^{1-1/t} + (t-1)m^{1+k/t} + kn \end{aligned}$$

Completando, portanto a demonstração para o Teorema 3.1.3. \square

4.3 Demonstração para o Teorema 3.1.5

No artigo (NIKIFOROV, 2007) encontra-se a generalização da desigualdade (3.4), que é obtida a partir de

$$\lambda(A) \leq \frac{k-l+1 + \sqrt{(k-l+1)^2 + 4l(n-1)}}{2},$$

tomando $l+1 = s$ e $k = s+1$. Para o caso $s \geq 3$ e $t \geq 3$ associado a cota (3.5) apresentaremos, a seguir, uma demonstração análoga a apresentada por Nikiforov (2010).

Demonstração

Seja $u \in V(G)$ vértice de maior grau em G , U e W conjuntos disjuntos satisfazendo $|U| = d(u)$ e $|W| = n-1$, e as seguintes funções bijetoras

$$\varphi_U : U \rightarrow \Gamma(u), \text{ e } \varphi_W : W \rightarrow V(G) \setminus \{u\}.$$

Definimos um grafo bipartido $H = H(W, U, E)$, tal que dados vértices $w \in W$ e $v \in U$, estes estão conectados se $\{\varphi_W(w), \varphi_U(v)\} \in E(G)$. Afirmamos que H não possui uma cópia de $K_{s-1,t}$ com $s-1$ vértices em W e t em U .

A fim de mostrar esta afirmação, seja $\psi : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_U(x) & \text{se } x \in U \\ \varphi_W(x) & \text{se } x \in W. \end{cases}$$

é um homeomorfismo de H em $G - u$.

Por contradição, assumimos que $F \subset H$ é uma cópia de $K_{s-1,t}$ com um conjunto S de tamanho $s-1$ vértices em W , e um conjunto T com tamanho t vértices em U .

Para todo $x \in V(F)$, $\psi(x)$ leva a uma cópia de $K_{s-1,t}$ em $G - u$. Em particular, $\psi(x) = \varphi_U(x)$ para todo $x \in T$, ou seja, $\psi(T) \subset \Gamma(u)$ no grafo G . Se adicionarmos u a

$\psi(F)$, verificamos que G possui uma cópia do $K_{s,t}$ contradizendo a hipótese do teorema. Portanto H não possui uma cópia de $K_{s-1,t}$.

Supondo $0 \leq k \leq \min\{s, t\} - 2$, e tomando $k' = k - 1$, $s' = s - 1$, $t' = t$, $X = W$ e $Y = U$ na seguinte desigualdade obtida do Teorema 3.1.4

$$ex(H, K_{s',t'}) \leq (s' - k' - 1)^{1/t'} |Y| |X|^{1-1/t'} + (t' - 1) |X|^{1+k'/t'} + k' |Y|$$

temos

$$ex(H, K_{s-1,t}) \leq (s - k - 1)^{1/t} |U| |W|^{1-1/t} + (t - 1) |W|^{1+(k-1)/t} + (k - 1) |U|.$$

Considerando a maneira que foram definidos U e W , bem como o fato de que $n - 1 < n$ conclui-se que

$$\begin{aligned} ex(H, K_{s-1,t}) &\leq (s - k - 1)^{1/t} d(u) (n - 1)^{1-1/t} + (t - 1) (n - 1)^{1+(k-1)/t} + (k - 1) d(u) \\ &\leq (s - k - 1)^{1/t} d(u) n^{1-1/t} + (t - 1) n^{1+(k-1)/t} + (k - 1) d(u). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$ex(H, K_{s-1,t}) = \sum_{v \in \Gamma(u)} d(v) - d(u),$$

portanto

$$\sum_{v \in \Gamma(u)} d(v) - d(u) \leq (s - k - 1)^{1/t} d(u) n^{1-1/t} + (t - 1) n^{1+(k-1)/t} + (k - 1) d(u)$$

simplificando

$$\sum_{v \in \Gamma(u)} d(v) \leq [(s - k - 1)^{1/t} n^{1-1/t} + k] d(u) + (t - 1) n^{1+(k-1)/t}.$$

Em particular podemos reescrever a desigualdade acima como

$$\sum_{v \in \Gamma(u)} d(v) - [(s - k - 1)^{1/t} n^{1-1/t} + k] d(u) \leq (t - 1) n^{1+(k-1)/t}. \quad (4.19)$$

Seja A a matriz de adjacência associada ao grafo G , e C uma matriz dada por

$$C = A^2 - [(s - k - 1)^{1/t} n^{1-1/t} + k] A,$$

tomemos a soma da linha de C correspondente ao vértice u , ou seja,

$$\sum_{j=1}^n c_{u,j} = \sum_{v \in \Gamma(u)} d(v) - [(s - k - 1)^{1/t} n^{1-1/t} + k] d(u).$$

Note que a parte a direita da igualdade ocorre a esquerda em (4.19), logo é possível acoplar estas obtendo

$$\sum_{j=1}^n c_{u,j} \leq (t - 1) n^{1+(k-1)/t}. \quad (4.20)$$

Considerando \mathbf{x} autovetor associado ao autovalor $\lambda(A)$, e tomando μ o autovalor associado a $C\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$, pelo Teorema A.2.3 temos que

$$c_{i,i} - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} c_{i,j} \leq \mu \leq c_{i,i} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} c_{i,j},$$

em particular

$$\mu \leq c_{i,i} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} c_{i,j} \leq \sum_{j=1}^n c_{u,j}.$$

Usando o fato decorrido de (4.20) encontra-se a seguinte cota superior de μ

$$\mu \leq \sum_{j=1}^n c_{u,j} \leq (t-1)n^{1+(k-1)/t}.$$

Para não carregar a notação, tomemos $\lambda = \lambda(A)$ e olhemos para $C\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned} C\mathbf{x} &= A^2\mathbf{x} - [(s-k-1)^{1/t}n^{1-1/t} + k]A\mathbf{x} \\ \mu\mathbf{x} &= \lambda^2\mathbf{x} - [(s-k-1)^{1/t}n^{1-1/t} + k]\lambda\mathbf{x} \\ \mu &= \lambda^2 - [(s-k-1)^{1/t}n^{1-1/t} + k]\lambda. \end{aligned}$$

Uma vez que acima foi encontrada uma cota para μ temos que esta igualdade pode ser reescrita como

$$\lambda^2 - [(s-k-1)^{1/t}n^{1-1/t} + k]\lambda \leq (t-1)n^{1+(k-1)/t},$$

em particular

$$\lambda^2 - [(s-k-1)^{1/t}n^{1-1/t} + k]\lambda - (t-1)n^{1+(k-1)/t} \leq 0.$$

Resolvendo a última desigualdade para λ , considerando, apenas a limitante superior, obtêm-se

$$\lambda \leq \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4(t-1)n^{1+(k-1)/t}}{[(s-k-1)^{1/t}n^{1-1/t} + k]^2}} \right] \frac{(s-k-1)^{1/t}n^{1-1/t} + k}{2}.$$

Limitando o radical pela desigualdade de Bernoulli, obtêm-se

$$\lambda \leq \left[1 + 1 + \frac{2(t-1)n^{1+(k-1)/t}}{[(s-k-1)^{1/t}n^{1-1/t} + k]^2} \right] \frac{(s-k-1)^{1/t}n^{1-1/t} + k}{2}.$$

Simplificando,

$$\lambda \leq (s-k-1)^{1/t}n^{1-1/t} + (t-1)n^{k/t} + k.$$

Por fim, considerando que $s \geq t \geq 3$, e tomando $k = t - 2$, obtemos (3.5), completando a prova deste teorema. \square

4.4 Demonstração para o Teorema 3.2.1

Abaixo apresentamos a demonstração detalhada do Teorema 3.2.1.

Demonstração

Supomos que o autovetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é um autovetor normalizado associado a $\lambda(L)$, ou seja, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.

Da definição de autovalor e autovetor temos que $L\mathbf{x} = \lambda(L)\mathbf{x}$, em particular,

$$\mathbf{x}^T L\mathbf{x} = \lambda(L)\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda(L).$$

Note que $\mathbf{x}^T L\mathbf{x} = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2$, portanto

$$\lambda(L) = \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2. \quad (4.21)$$

Note, também que

$$\sum_{\{i,j\} \in E} (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{i=1}^n d(i)x_i^2. \quad (4.22)$$

Olhemos para

$$\begin{aligned} 2\Delta - \lambda(L) &= (2\Delta - \lambda(L)) \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (2\Delta - \lambda(L))x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (2\Delta - 2d(i) + 2d(i) - \lambda(L))x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (2\Delta - 2d(i))x_i^2 + \sum_{i=1}^n (2d(i) - \lambda(L))x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (2\Delta - 2d(i))x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n d(i)x_i^2 - \lambda(L) \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (2\Delta - 2d(i))x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n d(i)x_i^2 - \lambda(L) \end{aligned}$$

Usando (4.21) e (4.22), a igualdade acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} 2\Delta - \lambda(L) &= \sum_{i=1}^n (2\Delta - 2d(i))x_i^2 + 2 \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i^2 + x_j^2) - \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (2\Delta - 2d(i))x_i^2 + \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i + x_j)^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Seja \mathfrak{T} o conjunto de triângulos em G , para cada triângulo \mathcal{T} em G , formado por i, j, q definimos

$$S(\mathcal{T}) = (x_i + x_j)^2 + (x_j + x_q)^2 + (x_i + x_q)^2.$$

Claramente

$$S(\mathcal{T}) = x_i^2 + x_j^2 + x_q^2 + (x_i + x_j + x_q)^2 \geq x_i^2 + x_j^2 + x_q^2.$$

Fixando um vértice i de G , e uma vez que G não possui cópia de $K_{1,t}$, o subgrafo induzido de G em $\Gamma(i)$ não possui conjunto independente de tamanho t e, portanto, têm no mínimo $a(d(i), t)$ arestas.

Segue que o vértice i está presente em pelo menos $a(d(i), t)$ triângulos. Portanto,

$$\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}} S(\mathcal{T}) \geq \sum_{j=1}^n a(d(i), t) x_j^2. \quad (4.24)$$

Uma vez que G tem grau máximo Δ , cada aresta está contida em, no máximo $\Delta - 1$ triângulos, ou seja,

$$\sum_{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}} S(\mathcal{T}) \leq (\Delta - 1) \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i + x_j)^2. \quad (4.25)$$

Seja $\bar{T}(\Delta, t)$ o complementar do grafo de Turán com Δ vértices e $a(\Delta, t)$ arestas. Portanto, $\bar{T}(\Delta, t)$ é a união de $k - 1$ cliques disjuntos pelas definições de $a(\Delta, t)$ e de grafo de Turán. Observe que $T(d(i), t)$ é um subgrafo induzido de $\bar{T}(\Delta, t)$ em $\Gamma(i)$, e que $\bar{T}(\Delta, t)$ pode ser obtido de $T(d(i), t)$ pela adição de vértices uma a um, de forma que cada vértice novo seja adjacente a um subconjunto de vértices existentes.

O número de arestas adicionadas por vértice novo nunca excede $\Delta - 1$, em particular, nunca excede $2(\Delta - 1)$. O que nos leva a seguinte desigualdade

$$2(\Delta - d(i))(\Delta - 1) \geq a(\Delta, t) - a(d(i), t) \quad (4.26)$$

válida para todo $d(i) \leq \Delta$.

Juntando as desigualdades (4.24) e (4.25) a fim de limitar $\sum S(\mathcal{T})$ obtêm-se

$$(\Delta - 1) \sum_{\{i,j\} \in E} (x_i + x_j)^2 \geq \sum_{i=1}^n a(d(i), t) x_i^2,$$

e usando esta igualdade em (4.23) têm-se

$$2\Delta - \lambda(L) \geq \sum_{i=1}^n \left[2\Delta - 2d(i) + \frac{a(d(i), t)}{\Delta - 1} \right] x_i^2.$$

Aplicando a desigualdade (4.26) para $d(i) \leq \Delta$ na relação acima, têm-se

$$\begin{aligned} 2\Delta - \lambda(L) &\geq \sum_{i=1}^n \left[\frac{a(\Delta, t)}{\Delta - 1} - \frac{a(d(i), t)}{\Delta - 1} + \frac{a(d(i), t)}{\Delta - 1} \right] x_i^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^n \left[\frac{a(\Delta, t)}{\Delta - 1} \right] x_i^2 \\ &\geq \frac{a(\Delta, t)}{\Delta - 1} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &\geq \frac{a(\Delta, t)}{\Delta - 1}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Utilizando de um pensamento análogo, olharemos para a linha correspondente ao vértice u da equação $Q\mathbf{x} = \lambda(Q)\mathbf{x}$.

$$\begin{bmatrix} q_{u,1} & \cdots & q_{u,u} & \cdots & q_{u,w} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ q_{w,1} & \cdots & & \cdots & q_{w,w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix} = \lambda(Q) \begin{bmatrix} x_u \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix}.$$

Dela podemos concluir

$$q_{u,u}x_u + \sum_{\{u,i\} \in E(H)} x_i + q_{u,w}x_w = \lambda(Q)x_u,$$

que pode ser reescrito como

$$d(u)x_u + \sum_{\{u,i\} \in E(H)} x_i + x_w = \lambda(Q)x_u.$$

Como $\Delta(H) \leq s$, u pode ser escolhido de forma que possui o maior grau entre todos os vértices de H e $G = K_1 \vee H$, ou seja, $d(u) \leq s + 1$, assim podemos limitar superiormente a equação acima da seguinte maneira

$$\lambda(Q)x_u = d(u)x_u + \sum_{\{u,i\} \in E(H)} x_i + x_w \leq (s + 1)x_u + sx_u + x_w, \quad (4.30)$$

que pode simplificada para

$$(\lambda(Q) - 2s - 1)x_u \leq x_w. \quad (4.31)$$

Buscamos garantir

$$\lambda(Q) \geq \Delta(G) + 1. \quad (4.32)$$

Note que, por G ser obtido através da operação de *join* entre dois grafos, G é um grafo bipartido. Neste caso, usando a Proposição 2.3 de (CVETKOVIĆ, 2008) garantimos que $\lambda(Q) = \lambda(L)$; restando mostrar $\lambda(L) \geq \Delta(G) + 1$. Por sua vez, esta desigualdade foi identificada e validada por Merris (1994), resultando na validação de (4.32).

Seguindo com operações sobre algumas desigualdades recém vistas multiplicamos a desigualdade (4.31) por $\lambda(Q) - n + 1 > 0$, obtendo

$$(\lambda(Q) - n + 1)(\lambda(Q) - 2s - 1)x_u \leq (\lambda(Q) - n + 1)x_w.$$

Note que a expressão que aparece à direita desta desigualdade é a mesma que aparece à esquerda de (4.29), e portanto

$$(\lambda(Q) - n + 1)(\lambda(Q) - 2s - 1)x_u \leq (n - 1)x_u.$$

Simplificando, obtêm-se a seguinte expressão

$$\lambda(Q)^2 - (n - 2s)\lambda(Q) + 2s(n - 1) \leq 0$$

que, ao ser resolvida, nos fornece os seguintes resultados

$$\lambda(Q) \leq \frac{n + 2s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(n + 2s)^2 - 8s(n - 1)} \quad (4.33)$$

e

$$\lambda(Q) \geq \frac{n + 2s}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(n + 2s)^2 - 8s(n - 1)} \quad (4.34)$$

Sendo de nosso interesse apenas a inequação (4.33), uma vez que estamos limitando $\lambda(Q)$ superiormente por um valor positivo.

Mostremos que se a igualdade vale em (4.33), então H é s -regular.

Se a igualdade vale em (4.33), então $\lambda(Q)^2 - (n + 2s)\lambda(Q) + 2s(n - 1) = 0$. Feita esta consideração repetiremos os passos anteriores. Multipliquemos a desigualdade (4.31) por $\lambda(Q) - n + 1$, obtendo

$$(\lambda(Q) - n + 1)(\lambda(Q) - 2s - 1)x_u \leq (\lambda(Q) - n + 1)x_w.$$

Juntamente com (4.29), tal desigualdade nos proporciona as seguintes cotas superiores e inferiores para $(\lambda(Q) - n + 1)x_w$.

$$(\lambda(Q) - n + 1)(\lambda(Q) - 2s - 1)x_u \leq (\lambda(Q) - n + 1)x_w \leq (n - 1)x_u$$

Em particular, esta expressão pode ser escrita como

$$\underbrace{(\lambda(Q)^2 - (n + 2s)\lambda(Q) + 2s(n - 1))}_{=0} + (n - 1)x_u \leq (\lambda(Q) - n + 1)x_w \leq (n - 1)x_u,$$

logo

$$(\lambda(Q) - n + 1)x_w = (n - 1)x_u,$$

ou seja,

$$\lambda(Q)x_w = (n - 1)x_u + (n - 1)x_w.$$

Seguindo o mesmo processo, multiplicando (4.29) por $\lambda(Q) - 2s - 1$ e (4.31) por $n - 1$, concluímos que

$$(\lambda(Q) - 2s - 1)x_u = x_w$$

e

$$\lambda(Q)x_u = (s + 1)x_u + x_w + sx_u.$$

Usando as igualdades que acabamos de mostrar em (4.28), concluímos que

$$\sum_{v \in V(H)} x_v = (n - 1)x_u,$$

em particular, $x_v = x_u$ para todo $v \in V(H)$.

Sendo assim, (4.30) pode ser reescrita e simplificada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} d(v)x_v + \sum_{\{p,v\} \in E(H)} x_p + x_w &= (s+1)x_v + sx_v + x_w \\ d(v)x_v + \sum_{\{p,v\} \in E(H)} x_p &= (s+1)x_v + sx_v \\ d(v)x_v &= (s+1)x_v. \end{aligned}$$

Conclui-se assim, que $d(v) = s+1$ para todo $v \in V(H)$, ou seja, H é s -regular.

Mostremos agora que se H é s -regular, então tem-se igualdade em (4.33).

Segundo o Teorema 2.1 proposto em (FREITAS et al., 2010) o polinômio característico associado a matriz Laplaciana sem sinal de $K_1 \vee H$ é

$$P_Q(K_1 \vee H) = \frac{P_Q(K_1, x-n+1)P_Q(H, x-1)}{(x-n+1)(x-2s-1)} [x^2 - (2s+n)x + 2s(n-1)].$$

Em particular,

$$P_Q(K_1, x-n+1) = x-n+1$$

e

$$P_Q(H, x-1) = (x-1-2s) \left[\prod_{\lambda < 2s} (x-1-\lambda) \right],$$

uma vez que foi considerado $\lambda_1(Q) \geq \dots \geq \lambda_n(Q)$ autovalores associados a $Q(H)$, e $\lambda_1(L) \geq \dots \geq \lambda_n(L) = 0$ autovalores associados a $L(H)$, para a Proposição 5.6 em (ABREU et al., 2014). Resultando na conclusão que $\lambda_1(Q) = 2s$. Portanto, o polinômio característico associado ao “join” pode ser entendido como

$$P_Q(K_1 \vee H) = \frac{(x-n+1)(x-1-2s) \left[\prod_{\lambda < 2s} (x-1-\lambda) \right]}{(x-n+1)(x-2s-1)} [x^2 - (2s+n)x + 2s(n-1)].$$

Busca-se a maior raiz associada a este polinômio, ou seja,

$$\lambda(Q) = \max \left\{ \left\{ \lambda \mid \lambda < 2s \text{ e é raiz de } P_Q(H, x-1) \right\}, \frac{n+2s}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(n-2s)^2 + 8s}, \frac{n+2s}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(n-2s)^2 + 8s} \right\}.$$

Tal raiz máxima é encontrada em

$$\lambda(Q) = \frac{n+2s}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(n-2s)^2 + 8s},$$

e caracteriza a solução desejada. □

4.6 Demonstração para o Teorema 3.3.3

A seguir é apresentada a demonstração proposta em (FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016) ao Teorema 3.3.3 como parte da demonstração ao Teorema 3.3.1.

Demonstração

Seguindo a mesma metodologia de demonstração proposta por Merris (1998), substituindo a matriz Laplaciana pela matriz Laplaciana sem sinal, obtemos a seguinte desigualdade para $\lambda(Q)$.

$$\lambda(Q) \leq \max \left\{ d(u) + \frac{1}{d(u)} \sum_{v \in \Gamma(u)} d(v) \mid u \in V(G) \text{ e } d(u) > 0 \right\} \quad (4.35)$$

Usando esta desigualdade busca-se mostrar que

$$\lambda(Q) < n.$$

Olhemos para uma função $F(u)$, com $u \in V(G)$ e $d(u) > 0$, de modo que

$$F(u) = d(u) + \frac{1}{d(u)} \sum_{v \in \Gamma(u)} d(v). \quad (4.36)$$

A fim de compreensão do leitor vamos dividir esta demonstração em duas partes, primeiramente vamos supor que $\Delta(G) \leq n - s - 2$ e mostremos que $F(u) < n$ para todo $u \in V(G)$; em seguida vamos supor $n - s - 1 \leq \Delta(G) \leq n - 1$ e mostraremos $\lambda(Q) < n$ usando prova por contradição.

Supondo $\Delta(G) \leq n - s - 2$ mostremos que $F(u) < n$ para todo $u \in V(G)$.

- Se $d(u) \leq s + 1$, então

$$F(u) = d(u) + \frac{1}{d(u)} \sum_{v \in \Gamma(u)} d(v) \leq d(u) + \Delta(G) \leq s + 1 + \Delta(G) < n \quad (4.37)$$

- Se $s + 2 \leq d(u) \leq n - s - 2$, então fixemos $u \in V(G)$ de modo que u não seja um vértice isolado, ou seja, tomemos $A = \Gamma(u)$, com $A \neq \emptyset$, e $B = V(G) \setminus (A \cup \{u\})$, logo

$$\frac{1}{d(u)} \sum_{v \in \Gamma(u)} d(v) = \frac{1}{d(u)} [2e_A + \hat{e}(A, B) + d(u)].$$

Substituindo a igualdade acima em (4.36), obtemos

$$F(u) = d(u) + 1 + \frac{1}{d(u)} [2e_A + \hat{e}(A, B)]. \quad (4.38)$$

Uma vez que G é livre de $K_{s+1,2}$, conclui-se que $\Delta(G[A]) \leq s$ e $\Gamma(v) \cap A \leq s$ se $v \in B$, portanto

$$2e_A = \sum_{v \in A} d(v) \leq s|V_A| = sd(u)$$

e

$$\hat{e}(A, B) = \sum_{v \in B} |\Gamma(v) \cap A| \leq \sum_{v \in B} vs = (n - d(u) - 1)s.$$

Substituindo estas desigualdades em (4.38) concluímos que

$$F(u) \leq d(u) + 1 + \frac{1}{d(u)} [sd(u) + ns - sd(u) - s],$$

ou seja,

$$F(u) \leq d(u) + 1 + \frac{(n-1)s}{d(u)}. \quad (4.39)$$

Olhemos para

$$f(x) = x + 1 + \frac{(n-1)s}{x}, \quad x > 0.$$

Note que $f(x)$ é convexa, uma vez que, $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$ para todo $x, y > 0$.

Sendo assim, para $x, y > 0$ e $t \in (0, 1)$ tem-se

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Considerando que o intervalo como $(s+2, n-s-2)$, conclui-se que

$$F(u) \leq \max\{f(s+2), f(n-s-2)\}. \quad (4.40)$$

Mostremos que

- $f(s+2) \leq n$

Se $n \geq s^2 + 4s + 6$

$$\begin{aligned} f(s+2) &= s+3 + \frac{(n-1)s}{s+2} \\ &= \frac{s^2 + 4s + 6 + sn}{s+2} \\ &\leq \frac{n + sn}{s+2} \\ &\leq n. \end{aligned}$$

- $f(n-s-2) \leq n$

Se $n \geq s^2 + 2s + 2$

$$\begin{aligned} f(n-s-2) &= n-s-1 + \frac{(n-1)s}{n-s-2} \\ &= \frac{n^2 + n(-3-s) + s^2 + 2s + 2}{n-s-2} \\ &\leq \frac{n^2 + n(-3-s) + n}{n-s-2} \\ &\leq \frac{n^2 - 2n - sn}{n-s-2} \\ &= n. \end{aligned}$$

Por hipótese $n \geq s^2 + 6s + 6$, portanto ambas desigualdades valem, assim

$$F(u) \leq \max\{f(s+2), f(n-s-2)\} \leq n.$$

Conclui-se, portanto que para $\Delta(G) \leq n - s - 2$

$$\lambda(Q) \leq \max\{F(u) | u \in V(G) \text{ e } d(u) > 0\} < n. \quad (4.41)$$

Resta mostrar o mesmo resultado para $\Delta(G) \geq n - s - 1$.

Por contradição supomos $\lambda(Q) > n$, bem como tomemos $w \in V(G)$ tal que $d(w) = \Delta(G)$. Tomemos o conjunto $A = \Gamma(w)$ e o conjunto $B = V(G) \setminus (A \cup \{w\})$, de forma que $|B| = n - 1 - d(w) \leq s$.

Considerando, também $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ autovetor unitário não negativo associado a $\lambda(Q)$, tal que os índices i indicam a qual vértice o valor de x_i está relacionado. Tomemos $u \in A$, tal que $x_u = \max_{i \in V_A} |x_i|$ e $v \in B$, tal que $x_v = \max_{i \in V_B} |x_i|$.

- Mostremos que $d(u) \leq 2s + 1$ e $d(v) \leq 2s - 1$.

Note que,

$$\begin{aligned} d(u) &= 1 + |\Gamma(u) \cap A| + |\Gamma(u) \cap B| \\ &\leq 1 + s + |B| \\ &\leq 1 + 2s, \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde o número 1 indica a conexão de u com w pela construção feita, uma vez que, por $|\Gamma(u) \cap A| \leq s$. Caso fosse válido $d(u) \leq s + 1$ e $d(w) \leq s + 1$, existiria um $K_{s+1,2}$, o que contradiz a hipótese do teorema.

Observe, também que

$$\begin{aligned} d(v) &= |\Gamma(v) \cap A| + |\Gamma(v) \cap B| \\ &\leq s + |B| - 1 \\ &\leq 2s - 1, \end{aligned}$$

uma vez que $|\Gamma(v) \cap A| \leq s$, pois se fosse verdadeiro que $d(v) \leq s + 1$ e $d(w) \leq s + 1$, existiria um $K_{s+1,2}$ contradizendo a hipótese do teorema. Assim como foi considerado que $|\Gamma(v) \cap B| = |B| - 1$, uma vez que $v \notin \Gamma(v)$, e $v \in B$.

- Mostremos que $x_u \leq \frac{2}{n}$ e $x_v \leq \frac{2}{n}$.

Olhando para a equação $Q\mathbf{x} = \lambda(Q)\mathbf{x}$ e interpretando-a a partir da Definição 1.2.4, observando, em especial, a linha correspondente ao vértice u ,

$$\begin{bmatrix} q_{u,1} & \cdots & q_{u,u} & \cdots & q_{u,w} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ q_{w,1} & \cdots & & \cdots & q_{w,w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix} = \lambda(Q) \begin{bmatrix} x_u \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix}$$

encontramos a seguinte expressão

$$q_{u,u}x_u + \sum_{\nu \in \Gamma(u) \cap A} x_\nu + \sum_{\nu \in \Gamma(u) \cap B} x_\nu + q_{u,w}x_w = \lambda(Q)x_u,$$

que pode ser reescrita como

$$d(u)x_u + \sum_{\nu \in \Gamma(u) \cap A} x_\nu + \sum_{\nu \in \Gamma(u) \cap B} x_\nu + x_w = \lambda(Q)x_u.$$

Usando o que já foi demonstrado no tópico acima, e lembrando que tratamos de um vetor com entradas unitárias podemos concluir que

$$\lambda(Q)x_u \leq (2s + 1)x_u + sx_u + sx_v + 1. \quad (4.43)$$

Reorganizando esta desigualdade obtêm-se

$$(\lambda(Q) - 3s - 1)x_u \leq 1 + sx_v. \quad (4.44)$$

Analogamente, para a linha correspondente ao vértice v ,

$$\begin{bmatrix} q_{v,1} & \cdots & q_{v,v} & \cdots & q_{v,w} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ q_{w,1} & \cdots & & \cdots & q_{w,w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_v \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix} = \lambda(Q) \begin{bmatrix} x_v \\ \vdots \\ x_w \end{bmatrix}$$

encontramos a seguinte expressão

$$q_{v,v}x_v + \sum_{\nu \in \Gamma(v) \cap A} x_\nu + \sum_{\nu \in \Gamma(v) \cap B} x_\nu + q_{v,w}x_w = \lambda(Q)x_v,$$

que pode ser reescrito como

$$d(v)x_v + \sum_{\nu \in \Gamma(v) \cap A} x_\nu + \sum_{\nu \in \Gamma(v) \cap B} x_\nu + x_w = \lambda(Q)x_v.$$

Usando o que já foi demonstrado no tópico acima e lembrando que $v \notin \Gamma(v)$ mas $v \in B$, obtêm-se

$$\lambda(Q)x_v \leq (2s - 1)x_v + sx_u + (s - 1)x_v. \quad (4.45)$$

Reorganizando esta desigualdade tem-se

$$(\lambda(Q) - 3s + 2)x_v \leq sx_u. \quad (4.46)$$

Substituindo a cota superior para x_u obtida a partir de (4.44) em (4.46) encontra-se

$$(\lambda(Q) - 3s + 2)x_v \leq s \frac{1 + sx_v}{(\lambda(Q) - 3s - 1)}, \quad (4.47)$$

uma vez que supomos por contradição que $\lambda(Q) \geq n$, podemos usar esta desigualdade junto de outras operações em (4.47) a fim de simplificá-la, como mostrado a seguir, ao considerar $n \geq 4s + 1$.

$$\begin{aligned} (\lambda(Q) - 3s + 2)x_v &\leq s \frac{1 + sx_v}{(n - 3s - 1)} \\ &= \frac{s}{(n - 3s - 1)} + \frac{s}{(n - 3s - 1)} sx_v \\ &\leq \frac{s}{(n - 3s - 1)} + sx_v. \end{aligned}$$

Isolando x_v , e usando o que foi suposto por contradição, e considerando $n \geq s^2 + 4s + 1$ têm-se

$$\begin{aligned} x_v &\leq \frac{s}{(n - 3s - 1)(\lambda(Q) - 4s + 2)} \\ &\leq \frac{s}{(n - 3s - 1)(n - 4s + 2)} \\ &\leq \frac{s}{s(s + 1)(n - 4s + 2)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x_v &\leq \frac{1}{(s + 1)(n - 4s + 2)} \\ &\leq \frac{1}{2(n - 4s + 2)} \\ &\leq \frac{2}{n} \end{aligned}$$

considerando que $s \geq 1$, por hipótese, e que $n \geq \frac{16s-8}{3}$.

Analogamente para x_u encontramos a seguinte sucessão de desigualdades, ao usar $\lambda(Q) \geq n$ e substituir x_v por $\frac{2}{n}$ em (4.44).

$$\begin{aligned} x_u &\leq \frac{1 + sx_v}{n - 3s - 1} \\ &\leq \frac{1 + s\frac{2}{n}}{n - 3s - 1}. \end{aligned}$$

Por hipótese $n \geq s^2 + 6s + 6$, portanto

$$\begin{aligned} x_u &\leq \frac{1 + \frac{2s}{s^2+6s+6}}{n-3s-1} \\ &\leq \frac{1 + 1/3}{n-3s-1} \\ &\leq \frac{4}{3(n-3s-1)} \\ &\leq \frac{2}{n} \end{aligned}$$

com $n \geq 9s + 3$.

Chegando ao fim desta demonstração, observamos o produto interno de Q com o autovetor unitário não negativo \mathbf{x} , das seguintes maneiras

$$\begin{aligned} \langle Q\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \langle \lambda(Q)\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \lambda(Q) \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \lambda(Q) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle Q\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} d(v_1)x_1 + \sum_{\{1,i\} \in E(G)} x_i \\ \vdots \\ d(v_n)x_n + \sum_{\{n,i\} \in E(G)} x_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= d(v_1)x_1^2 + x_1 \sum_{\{1,i\} \in E(G)} x_i + \cdots + d(v_n)x_n^2 + x_n \sum_{\{n,i\} \in E(G)} x_i \\ &= \sum_{\{i,j\} \in E(G)} x_i^2 + 2x_i x_j + x_j^2 \\ &= \sum_{\{i,j\} \in E(G)} (x_i + x_j)^2 \end{aligned}$$

concluindo que

$$\sum_{\{i,j\} \in E(G)} (x_i + x_j)^2 = \lambda(Q). \quad (4.48)$$

Relembrando a notação inicial, foi escolhido $w \in V(G)$, tal que $d(w) = \Delta(G)$. Definiu-se os conjuntos $A = \Gamma(w)$ e $B = V(G) \setminus (A \cup \{w\})$ com $|A| \leq s$ e $|B| \leq s$, a fim de evitar um $K_{s,t}$. Tomamos, também $u \in A$, tal que $x_u = \max_{i \in V_A} |x_i|$ e $v \in B$, tal que $x_v = \max_{i \in V_B} |x_i|$.

Olhemos para o grafo induzido $G' = G[A \cup \{w\}]$ com $n' = |V(G')|$ e $\Delta(G') = n' - 1$. Note que o $\lambda(Q)$ associada ao grafo G , pode ser interpretado da seguinte forma, quando associado a igualdade proposta acima.

$$\sum_{\{i,j\} \in E(G)} (x_i + x_j)^2 = \sum_{\{i,j\} \in E(G')} (x_i + x_j)^2 + \sum_{\{i,j\} \in E_B} (x_i + x_j)^2 + \sum_{\{i,j\} \in \hat{E}(A,B)} (x_i + x_j)^2. \quad (4.49)$$

Em particular,

$$\sum_{\{i,j\} \in E(G')} (x_i + x_j)^2 \leq \sum_{\{i,j\} \in E(G)} (x_i + x_j)^2, \quad (4.50)$$

e

$$\sum_{\{i,j\} \in E_B} (x_i + x_j)^2 + \sum_{\{i,j\} \in \hat{E}(A,B)} (x_i + x_j)^2 \leq \sum_{\{i,j\} \in E_B} (x_v + x_v)^2 + \sum_{\{i,j\} \in \hat{E}(A,B)} (x_u + x_v)^2. \quad (4.51)$$

Usando a igualdade (4.48) em (4.50), e uma vez que $\Delta(G') = n' - 1$ apliquemos o resultado da Proposição 3.3.1 e operemos sobre o mesmo.

$$\begin{aligned} \sum_{\{i,j\} \in E(G')} (x_i + x_j)^2 &\leq \lambda(Q) \\ &\leq \frac{n' + 2s}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(n' - 2s)^2 + 8s} \\ &= n' + \frac{\sqrt{(n' - 2s)^2 + 8s} - (n' - 2s)}{2} \\ &= n' + \frac{4s}{\sqrt{(n' - 2s)^2 + 8s} + n' - 2s} \\ &< n' + \frac{2s}{n' - 2s}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Usando o fato de que $x_v \leq \frac{2}{n}$ e $x_u \leq \frac{2}{n}$, e que os somatórios podem ser limitados superiormente pelos números de arestas e_B e $\hat{e}(A, B)$ em (4.51), respectivamente temos

$$\begin{aligned} \sum_{\{i,j\} \in E_B} (x_i + x_j)^2 + \sum_{\{i,j\} \in \hat{E}(A,B)} (x_i + x_j)^2 &\leq e_B \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n} \right)^2 + \hat{e}(A, B) \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n} \right)^2 \\ &\leq \binom{s}{2} \frac{16}{n^2} + s^2 \frac{16}{n^2} \\ &\leq \left(\binom{s}{2} + s^2 \right) \frac{16}{n^2} \\ &\leq \frac{24s^2}{n^2}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Combinando as cotas (4.52) e (4.53) em (4.49),

$$\lambda(Q) < n' + \frac{2s}{n' - 2s} + \frac{24s^2}{n^2}. \quad (4.54)$$

Olhemos para a função $f(x) = x + \frac{2s}{x-2s}$, que é uma função convexa para $x > 2s$. Uma vez que $n' \leq n - 1$ e que $n' \geq n - s$ pela construção de G' através de G ocorre que para o intervalo $(n - s, n - 1)$ a função f pode ser limitada da seguinte maneira

$$x + \frac{2s}{x - 2s} \leq \max \left\{ n - s + \frac{2s}{n - s - 2s}, n - 1 + \frac{2s}{n - 1 - 2s} \right\}.$$

Usando os fatos de que $n - s \leq n - 1$, $s \geq 1$ e $n > 3s + 2$ consegue-se mostrar que o máximo é atingido em

$$n - 1 + \frac{2s}{n - 1 - 2s},$$

e portanto (4.54) pode ser reescrita como

$$\lambda(Q) < n - 1 + \frac{2s}{n - 1 - 2s} + \frac{24s^2}{n^2}. \quad (4.55)$$

Através das aproximações feitas a seguir chega-se à contradição do fato suposto inicialmente, $\lambda(Q) \geq n$, logo $\lambda(Q) < n$.

$$\begin{aligned} \lambda(Q) &< n - 1 + \frac{2s}{s^2 + 6s + 5 - 2s} + \frac{24s^2}{(s^2 + 6s + 6)^2} \\ &= n - 1 + \frac{2}{s + 4 + \frac{5}{s}} + \frac{24}{(s + 6 + \frac{6}{s})^2} \\ &\leq n - 1 + \frac{2}{5} + \frac{24}{49} \\ &< n. \end{aligned}$$

□

4.7 Demonstração para o Corolário 3.4.1

Abaixo apresentamos a demonstração detalhada do Corolário 3.4.1.

Demonstração

Através dos itens 1, 2 e 3 da Proposição 1.2.2, e pela hipótese de que G é um grafo com n vértices sabe-se que 0 e $\frac{n}{n-1}$ são autovalores associados à matriz $\mathcal{L}(G)$.

Portanto, para $G = K_n$, sempre será verdade que

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \max_{i \neq n} |1 - \lambda_i(\mathcal{L})| \\ &= \left| 1 - \frac{n}{n-1} \right| \\ &= \frac{1}{n-1} = o(1). \end{aligned}$$

Sendo assim, pelo Teorema 3.4.1 tem-se que qualquer grafo livre de K_{t+1} com n vértices tem no máximo

$$\left(1 - \frac{1}{t} + o(1) \right) \frac{n^2}{2}$$

arestas.

□

4.8 Demonstração para o Corolário 3.4.2

A seguir será apresentada a demonstração ao Corolário 3.4.2.

Demonstração

Note que

$$\text{vol}_{-2t+3}(G) = nk^{-2t+3}$$

e

$$\text{vol}(G)^{t-2} = (nk)^{t-2},$$

uma vez que G é um grafo k -regular com n vértices. Em particular

$$\frac{1}{(nk^{-2t+3})(nk)^{t-2}} = \left(\frac{k}{n}\right)^{t-1},$$

que, quando aplicado em (3.14) reduz-se à igualdade desejada.

Além disso, pelo Teorema 3.4.1 tem-se que qualquer subgrafo de G livre de K_{t+1} com n vértices têm no máximo

$$\left(1 - \frac{1}{t} + o(1)\right) \frac{kn}{2}$$

arestas. □

Conclusão

A atual expansão da teoria espectral de grafos, seu fácil uso e aplicação, sua relação direta com a teoria matricial, juntamente com os problemas não solucionados de Turán e Zarankiewicz compõem o que vem sendo categorizado como teoria espectral extremal de grafos, como é mencionada em (HE; JIN; ZHANG, 2013; NIKIFOROV, 2011). Tal teoria foi abordada nesta dissertação, ao escolhermos compreender plenamente o método de demonstração de cotas espectrais associadas ao problema de Zarankiewicz e em um caso especial para o problema de Turán.

A retomada de cotas espectrais no Capítulo 3 foi motivada devido ao atual desenvolvimento da área. A motivação surgiu em (FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016), despertando a curiosidade dos envolvidos a buscar resultados similares, associados a tal problema. Já no Capítulo 4 buscou-se trazer ao leitor, de forma clara e plena, as demonstrações associadas aos Teoremas 3.1.2, 3.1.3, 3.1.5, 3.2.1, 3.3.3, aos Corolários 3.4.1, 3.4.2 e a Propriedade 3.3.1, acompanhadas de uma revisão histórica de soluções existentes, tanto para o problema de Turán, quanto para o de Zarankiewicz, apresentada no Capítulo 2.

Tal investigação visou reunir os principais métodos de demonstrações espectrais a fim de solucionar o problema de Zarankiewicz associado à matriz Laplaciana normalizada. Entretanto, percebemos que tal abordagem não é tão simples, uma vez que ao manipulá-la encontram-se números irracionais, dificultando muito o processo de simplificação algébrica. Uma sugestão para o futuro seria utilizar tais métodos, adaptando-os a grafos com peso, como sugerido por Butler (2016).

Além do estudo que buscava a complementação da lacuna existente para a matriz Laplaciana normalizada, este extenso compilado de cotas espectrais nos instigou a compreender melhor a relação entre os índices e o número de Turán, diretamente relacionado ao número de Zarankiewicz. Motivados por tal, construímos a tabela a seguir, a fim de associar as cotas provadas anteriormente com o número de Turán.

Matriz	Referência	Cota para o número de arestas
A	Babai e Guiduli (2009)	$ex(G, K_{s,2}) \leq \frac{(s-1)^{1/2}n}{2} + O(n^{1/2}s^{1/4})$
	Nikiforov (2010)	$ex(G, K_{s,2}) \leq \frac{n}{4} + \frac{n}{2}\sqrt{(s-1)(n-1)} + \frac{1}{4}$
		$ex(G, K_{s,t}) \leq \frac{1}{2}(s-t+1)^{1/t}n^{2-1/t} + \frac{1}{2}(t-1)n^{2-2/t} + \frac{1}{2}(t-2)n$
L	Aharoni, Alon e Berger (2015)	$ex(G, K_{1,t}) \leq \frac{3n\Delta}{2} - \left(2 - \frac{1}{2t-2} + o(1)\right) \frac{\Delta n}{2}$
Q	Freitas, Nikiforov e Patuzzi (2016)	$ex(G, K_{s+1,2}) \leq \frac{n^2 + 2ns}{8} + \frac{n}{8}\sqrt{(n-2s)^2 + 8s}$

Tabela 2 – Cotas propostas para os índices de A, L e Q reescritas de forma que limitam superiormente o número de Turán.

As ferramentas utilizadas na conexão entre tais resultados são apresentadas no Capítulo 1, e compõem a seguinte relação principal.

$$ex(G, K_{s,t}) \leq \frac{n\lambda(A)}{2} \leq \frac{n\lambda(Q)}{4} \leq \frac{n(3\Delta - \lambda(L))}{2} \leq \frac{n\Delta(3 - \lambda(\mathcal{L}))}{2}$$

Infelizmente, não é possível realizar uma comparação entre todas as cotas apresentadas acima, uma vez que trabalhou-se com a exclusão dos mais diversos grafos bipartidos.

Dentre as comparações viáveis, sabe-se da literatura, que a cota proposta por Nikiforov (2010) melhora a cota proposta por Babai e Guiduli (2009). Para a exclusão de um $K_{s,2}$ para todo $s \geq 2$, podemos comparar as cotas provenientes de (NIKIFOROV, 2010) e (FREITAS; NIKIFOROV; PATUZZI, 2016) - esta última com uma pequena modificação para que comece em $s \geq 2$ e não em $s \geq 1$. Pelo o fato de que $\lambda(A) \leq \frac{\lambda(Q)}{2}$ conclui-se que a cota de Nikiforov (2010) ainda é a melhor possível. Nos demais casos, nada pode ser concluído.

Como trabalho futuro sugerimos a busca por cotas mais justas para as matrizes Laplaciana e Laplaciana sem sinal, juntamente com a comparação entre os resultados espectrais apontados no Capítulo 2 - especialmente os obtidos a partir do ano de 2013.

Propomos, também a busca por uma cota ao problema de Zarankiewicz associada à matriz Laplaciana normalizada, uma vez que não foi encontrado nada a respeito na literatura até o momento.

Referências

- ABREU, N. M. M. de et al. *Teoria espectral de grafos - Uma introdução*. Florianópolis: III Colóquio de Matemática da Região Sul, 2014. 201 p.
- AHARONI, R.; ALON, N.; BERGER, E. Eigenvalues of $K_{1,k}$ -free graphs and the connectivity of their independence complexes. *Journal of Graph Theory*, v. 83, n. 4, p. 384–391, 2015.
- AIGNER, M. et al. *Proofs from THE BOOK*. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2004. VIII, 239 p. ISBN 78-3-662-05412-3.
- ALON, N.; KRIVELEVICH, M.; SUDAKOV, B. Turán numbers of bipartite graphs and related Ramsey-type questions. *Combinatorics, Probability and Computing*, Cambridge University Press, v. 12, p. 477–494, 2003.
- ALON, N.; RÓNYAI, L.; SZABÓ, T. Norm-graphs: Variations and applications. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 76, n. 2, p. 280–290, 1999. ISSN 00958956.
- AXLER, S. *Linear algebra done right*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1997. v. 5. 832 p. ISBN 0387982590.
- BABAI, L.; GUIDULI, B. Spectral extrema for graphs: The Zarankiewicz problem. *The Electronic Journal of Combinatorics*, v. 16, 2009. ISSN 10778926.
- BALBUENA, C. et al. Extremal $K_{s,t}$ free bipartite graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, v. 10, n. 3, p. 35–48, 2008.
- BALL, S.; PEPE, V. Asymptotic improvements to the lower bound of certain bipartite Turán numbers. *Combinatorics, Probability and Computing*, v. 21, p. 232–239, 2012.
- BIGGS, N. L.; LLOYD, E. K.; WILSON, R. J. *Graph theory, 1736-1936*. [S.l.]: Oxford University Press Inc., 1976. 239 p. ISBN 0198539169.
- BLAGOJEVIĆ, P. V.; BUKH, B.; KARASEV, R. Turán numbers for $K_{s,t}$ -free graphs: Topological obstructions and algebraic constructions. *Israel Journal of Mathematics*, v. 197, n. 1, p. 199–214, 2013.
- BOLLOBÁS, B. Extremal graph theory. In: GRAHAM, R. L.; GRÖTSCHTEL, M.; LOVÁSZ, L. (Ed.). *Handbook of combinatorics II*. [S.l.]: Elsevier Inc., 1995. cap. 23, p. 1231–1292. ISBN 0444823514.
- BOLLOBÁS, B.; ERDŐS, P. On the structure of edge graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 5, n. 3, p. 317–321, 1973.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph theory*. [S.l.]: Springer, 2008. 663 p. ISSN 0717-6163. ISBN 978-1-84628-969-9.
- BONDY, J. A.; SIMONOVITS, M. Cycles of even length in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 16, p. 97–105, 1974.

- BRONDANI, A. E. et al. Sobre os espectros das matrizes Laplaciana, Laplaciana normalizada e Laplaciana sem sinal de um grafo. In: *Simpósio brasileiro de pesquisa operacional*. Natal: [s.n.], 2013. p. 513–524.
- BROWN, W. G. On graphs that do not contain a Thomsen graph. *Canadian Mathematical Bulletin*, v. 9, n. 3, p. 281–285, 1966.
- BUKH, B.; JIANG, Z. A bound on the number of edges in graphs without an even cycle. Cambridge University Press, v. 26, p. 1–15, 2017.
- BUTLER, S. *Eigenvalues and structures of graphs*. 79 p. Tese (Doutorado) — University of California, San Diego, 2008.
- BUTLER, S. Algebraic aspects of the normalized Laplacian. In: *Recent Trends in Combinatorics*. [S.l.]: Springer, 2016. p. 295–315. ISBN 978-3-319-24298-9.
- CHOI, J.-H.; CHO, M. Ion aggregation in high salt solutions. II. Spectral graph analysis of water hydrogen-bonding network and ion aggregate structures. *The Journal of Chemical Physics*, v. 141, n. 15, p. 154502, 2014.
- CHUNG, F. *Spectral graph theory*. [S.l.]: American Mathematical Society, 1994. 214 p. ISBN 0821803158.
- CHUNG, F. A spectral Turán theorem. *Combinatorics, Probability and Computing*, Cambridge University Press, v. 14, n. 5-6, p. 755–767, 2005.
- CHVATAL, V.; SZEMEREDI, E. On the Erdős-Stone theorem. *Journal of the London Mathematical Society*, v. 2, n. 2, p. 207–214, 1981.
- CVETKOVIĆ, D. M. *Graphs and their spectra*. 1–50 p. Tese (Doutorado) — University of Belgrade, 1971.
- CVETKOVIĆ, D. M. New theorems for signless Laplacian eigenvalues. *Bulletin, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences mathématiques*, v. 137, n. 33, p. 131–146, 2008.
- CVETKOVIĆ, D. M.; DOOB, M.; SACHS, H. *Spectra of graphs: Theory and application*. [S.l.]: Academic Press, 1980. 368 p. ISSN 0079-8169. ISBN 0121951502.
- CVETKOVIĆ, D. M.; ROWLINSON, P.; SIMIĆ, S. *An Introduction to the theory of graph spectra*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. 378 p. ISBN 9780521118392.
- DAIANU, M. et al. Spectral graph theory and graph energy metrics show evidence for the Alzheimer’s disease disconnection syndrome in APOE-4 risk gene carriers. *Proceedings - International Symposium on Biomedical Imaging*, v. 2015-July, p. 458–461, 2015. ISSN 19458452.
- DESAI, M.; RAO, V. *A characterization of the smallest eigenvalue of a graph*. [S.l.], 1991. 1–16 p.
- DIESTEL, R. *Graph theory (Graduate texts in Mathematics)*. [S.l.: s.n.], 2006. 415 p. ISSN 1079-7114. ISBN 3540261834.

- ERDÖS, P. On sequences of integers no one of which divides the product of two others and on some related problems. *Isvestia Nauchno-Issl. Inst. Mat. i Meh. Tomsk*, p. 74–82, 1938.
- ERDÖS, P. On extremal problems of graphs and generalized graphs. *Israel Journal of Mathematics*, v. 2, n. 3, 1964.
- ERDÖS, P.; RÉNYI, A.; SÓS, V. T. On a problem of graph theory. *Studia Sci. Math. Hungar.*, v. 1, p. 215—235, 1966. ISSN 0025-5572.
- ERDÖS, P.; SIMONOVITS, M. A limit theorem in graph theory. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, v. 1, p. 51–57, 1966.
- ERDÖS, P.; SIMONOVITS, M. Cube-supersaturated graphs and related problems. *Progress in graph theory (Waterloo, Ont., 1982)*, p. 203–218, 1984.
- ERDÖS, P.; SPENCER, J. *Probabilistic methods in combinatorics*. [S.l.]: Academic Press, 1974.
- ERDÖS, P.; STONE, A. H. On the structure of linear graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, p. 1087–1091, 1946.
- FRANKLIN, J. N. *Matrix theory*. [S.l.]: Dover Publications, INC., 2000. 320 p. ISSN 1098-6596. ISBN 978-0-486-41179-8.
- FREITAS, M. A. A. de et al. Infinite families of q -integral graphs. *Linear Algebra and its Applications*, v. 432, n. 9, p. 2352–2360, 2010.
- FREITAS, M. A. A. de; NIKIFOROV, V.; PATUZZI, L. Maxima of the q -index: Forbidden 4-cycle and 5-cycle. *Electronic Journal of Linear Algebra*, v. 26, p. 905–916, dec 2013.
- FREITAS, M. A. A. de; NIKIFOROV, V.; PATUZZI, L. Maxima of the q -index: Graphs with no $K_{s,t}$. *Linear Algebra and its Applications*, v. 496, p. 381–391, 2016.
- FÜREDI, Z. Turán type problems. In: KEEDWELL, A. D. (Ed.). *Surveys in combinatorics, 1991*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. v. 166, n. 0, p. 253–300. ISBN 9780521407663.
- FÜREDI, Z. An upper bound on Zarankiewicz’ problem. *Combinatorics, Probability and Computing*, Cambridge University Press, v. 5, n. 1, p. 29–33, sep 1996.
- FÜREDI, Z. New asymptotics for bipartite Turán numbers. *Journal of Combinatorial Theory*, Academic Press, v. 75, n. 67, p. 141–144, 1996.
- FÜREDI, Z. On the number of edges of quadrilateral-free graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, v. 68, n. 1, p. 1–6, 1996.
- FÜREDI, Z.; SIMONOVITS, M. The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems. In: László Lovász; Imre Z. Ruzsa; Vera T. Sós (Ed.). *Erdős Centennial*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 169–264. ISBN 978-3-642-39286-3.
- GUIDULI, B. *Spectral extrema for graphs*. Tese (Doutorado) — University of Chicago, 1996.

GUTMAN, I.; POLANSKY, O. E. *Mathematical concepts in organic chemistry*. Berlin: Springer, 1986. 214 p.

HE, B.; JIN, Y.-L.; ZHANG, X.-D. Sharp bounds for the signless Laplacian spectral radius in terms of clique number. *Linear Algebra and its Applications*, v. 438, n. 10, p. 3851–3861, 2013.

HEILMANN, O. J.; LIEB, E. H. Theory of monomer-dimer systems. *Communications in Mathematical Physics*, v. 25, n. 3, p. 190–232, 1972.

HÜCKEL, E. Quantentheoretische Beiträge zum Problem der aromatischen und ungesättigten Verbindungen. III. *Zeitschrift für Physik*, v. 76, n. 9, p. 628–648, 1932. ISSN 0044-3328.

HYLTÉN-CAVALLIUS, C. On a combinatorial problem. *Coloquium Mathematicum*, p. 59–65, 1958.

KOLLÁR, J.; RÓNYAI, L.; SZABÓ, T. Norm-graphs and bipartite Turán numbers. *Combinatorica*, v. 1, p. 399–406, 1996. ISSN 0209-9683; 1439-6912/e.

KONG, Q.; WANG, L. Upper bounds on the q -spectral radius of book-free and or $K_{s,t}$ free graphs. *Electronic Journal of Linear Algebra*, v. 32, p. 447–453, 2016.

KÓVARI, T.; SÓS, V. T.; TURÁN, P. On a problem of K. Zaraniewicz. *Colloquium Math.*, v. 3, p. 50–57, 1954.

LIN, H.; HONG, Y.; SHU, J. Some relations between the eigenvalues of adjacency, Laplacian and signless Laplacian matrix of a graph. *Graphs and Combinatorics*, v. 31, n. 3, p. 669–677, 2015.

LOVÁSZ, L. *Combinatorial problems and exercises*. [S.l.]: Elsevier Inc., 1993. 235–241 p. ISBN 044481504X.

MANTEL, W. Problema 28. *Wiskundige Opgaven*, v. 10, p. 60–61, 1907.

MCFEE, B.; ELLIS, D. P. W. Analyzing song structure with spectral clustering. *15th International Society for Music Information Retrieval Conference (ISMIR 2014)*, p. 405–410, 2014.

MCWEENY, R.; SHUTCLIFFE, B. *Methods of molecular quantum mechanics*. Londres: Academic Press, 1969.

MERRIS, R. Laplacian matrices of graphs: a survey. *Linear Algebra and its Applications*, v. 197-198, p. 143–176, jan 1994.

MERRIS, R. A note on Laplacian graph eigenvalues. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 285, p. 33–35, 1998. ISSN 00243795.

MÖRS, M. A new result on the problem of Zarankiewicz. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, Academic Press, v. 31, n. 2, p. 126–130, sep 1981.

NIKIFOROV, V. Bounds on graph eigenvalues II. *Linear Algebra and its Applications*, v. 427, n. 2-3, p. 183–189, dec 2007. ISSN 0024-3795.

- NIKIFOROV, V. A contribution to the Zarankiewicz problem. *Linear Algebra and Its Applications*, v. 432, n. 6, p. 1405–1411, 2010. ISSN 00243795.
- NIKIFOROV, V. Some new results in extremal graph theory. In: R. Chapman (Ed.). *Surveys in Combinatorics 2011*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. cap. 4, p. 141–182.
- OLIVEIRA, C. S. et al. Bounds on the index of the signless Laplacian of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, v. 158, n. 4, p. 355–360, 2010.
- PACH, J.; TARDOS, G. Forbidden paths and cycles in ordered graphs and matrices. *Israel Journal of Mathematics*, v. 155, n. 1, p. 359–380, 2006.
- RAI, A. et al. Understanding cancer complexome using networks, spectral graph theory and multilayer framework. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 7, 2017. ISSN 2045-2322.
- SHI, L.; SONG, Z. Upper bounds on the spectral radius of book-free and/or $K_{2,t}$ -free graphs. *Linear Algebra and its Applications*, North-Holland, v. 420, n. 2-3, p. 526–529, jan 2007.
- SIMONOVITS, M. Extremal graph theory. In: BEINEKE, L. W.; WILSON, R. J. (Ed.). *Selected topics in graph theory II*. [S.l.]: Academic Press, 1983. cap. 6, p. 161–201. ISBN 0120862026.
- STEELE, J. M. *The Cauchy–Schwarz master class*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. 318 p. ISBN 9780521837750.
- STEVANOVIĆ, D. *Spectral radius of graphs*. [S.l.]: Elsevier Inc., 2014. 1–156 p. ISBN 9780128020975.
- SUDAKOV, B.; SZABÓ, T.; VU, V. H. A generalization of Turán’s theorem. *Journal of Graph Theory*, v. 49, p. 187–195, 2005.
- TURÁN, P. An extremal problem in graph theory. *Matematikai és Fizikai Lapok*, n. 48, p. 436–452, 1941.
- WEST, D. B. *Introduction to graph theory*. 2. ed. [S.l.]: Pearson Education, Inc., 2001. 512 p. ISBN 817808834.
- WILF, H. S. Spectral bounds for the clique and independence numbers of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Academic Press, v. 40, n. 1, p. 113–117, feb 1986.
- XU, G. et al. Extremal graphic model in optimizing fractional repetition codes for efficient storage repair. In: *Communications (ICC), 2016 IEEE International Conference*. [S.l.]: IEEE, 2016. p. 1–6. ISBN 9781479966646.
- YAN, C. Properties of spectra of graphs and line graphs. *Applied Mathematics - A Journal of Chinese Universities*, v. 17, n. 3, p. 371–376, 2002.
- ZARANKIEWICZ, K. Problem P101. *Colloquium Math.*, 1951.
- ZHANG, X.-D.; LUO, R. The spectral radius of triangle-free graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, v. 26, p. 33–39, 2002. ISSN 10344942.

ZNÁM, Š. On a combinatorial problem of K. Zarankiewicz. *Colloquium Mathematicum*, v. 11, n. 1, p. 81–84, 1963.

Apêndices

APÊNDICE A – Álgebra Linear

Neste espaço abordamos alguns resultados da álgebra linear, usados como ferramentas no texto. Para mais informações recomendamos a consulta de (AXLER, 1997) e (FRANKLIN, 2000).

A.1 Definições e proposições

Definição A.1.1 (Transposta de uma matriz). *A transposta de uma matriz é formada pela troca das linhas e colunas correspondentes, ou seja, se as entradas da matriz M são $m_{i,j}$, as entradas de tal matriz transposta, M^T , são $m_{j,i}$.*

Definição A.1.2 (Submatriz). *A submatriz de uma matriz M é formada através da escolha de certas linhas e colunas de M .*

Definição A.1.3 (Matriz Simétrica). *Uma matriz M de ordem $n \times n$ é dita simétrica se, para todo $1 \leq i, j \leq n$, $m_{i,j} = m_{j,i}$.*

Definição A.1.4 (Matriz Irredutível). *Uma matriz M é dita irredutível se, para todos os pares de índices $i \neq j$, ou $m_{i,j} \neq 0$ ou existe um conjunto de índices p_1, \dots, p_q tal que $m_{i,p_1} \neq 0, m_{p_1,p_2} \neq 0, \dots, m_{p_{q-1},p_q} \neq 0, m_{p_q,j} \neq 0$, com os índices i, p_1, \dots, p_q, j distintos.*

Definição A.1.5 (Produto Interno). *O produto interno em um espaço vetorial finito dimensional X sobre \mathbb{R} é uma função que leva cada par ordenado (\mathbf{x}, \mathbf{u}) de vetores em um número $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle$, e satisfaz as seguintes propriedades:*

- *Positividade*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in X$$

- *Nulidade*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- *Distributividade*

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \text{ para todo } \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in X.$$

- *Associativa*

$$\langle a\mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \text{ para todo } a \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{x}, \mathbf{u} \in X.$$

- *Comutatividade*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \text{ para todo } \mathbf{x}, \mathbf{u} \in X.$$

Um dos exemplos mais importantes de espaço vetorial com produto interno é o \mathbb{R}^n , onde seu produto interno é definido da seguinte forma

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n,$$

para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

Definição A.1.6 (Norma vetorial). O tamanho de um vetor \mathbf{x} é dito norma de \mathbf{x} e é denotado por $\|\mathbf{x}\|$. Tal medida por ser determinada da seguinte forma

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle},$$

onde $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ representa o produto interno do vetor \mathbf{x} com ele mesmo.

Definição A.1.7 (Operador auto-adjunto). Um operador $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dito auto-adjunto se, para quaisquer vetores \mathbf{x} e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ temos a seguinte propriedade:

$$\mathbf{u}^T M \mathbf{x} = \mathbf{x}^T M \mathbf{u}.$$

Proposição A.1.1. $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador auto-adjunto se, e somente se, sua representação matricial $M = [m_{i,j}]$ é simétrica em relação a uma base ortonormal.

Definição A.1.8 (Quociente de Rayleigh). O quociente de Rayleigh é a função descrita abaixo que associa um vetor não nulo \mathbf{x} a um escalar através da matriz real e simétrica M , havendo a possibilidade de ser escrito em termos do vetor unitário $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.

$$\frac{\mathbf{x}^T M \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \mathbf{u}^T M \mathbf{u} \tag{A.1}$$

A.2 Teoremas

Teorema A.2.1 (Teorema Espectral). Para todo operador auto-adjunto num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal formada por autovetores.

Teorema A.2.2 (Princípio de Rayleigh). Se M é uma matriz real e simétrica, μ_1 seu maior autovalor e $\|\mathbf{u}\| = 1$, então

$$\mu_1 = \max_{\mathbf{u} \neq 0} \mathbf{u}^T M \mathbf{u}. \tag{A.2}$$

Demonstração

Seja $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^n$ um conjunto completo de autovetores satisfazendo

$$M \mathbf{u}^i = \mu_i \mathbf{u}^i$$

e

$$(\mathbf{u}^i)^T \mathbf{u}^j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tal conjunto completo existe pelo Teorema A.2.1, visto que M é real e simétrica.

Estes vetores formam uma base para o \mathbb{R}^n , de forma que cada vetor unitário \mathbf{u} pode ser representado pela combinação linear desta, ou seja,

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}^1 + c_2 \mathbf{u}^2 + \cdots + c_n \mathbf{u}^n.$$

Um vez que tratamos de um vetor qualquer unitário \mathbf{u} observamos que

$$\begin{aligned} 1 = \mathbf{u}^T \mathbf{u} &= \sum_i \sum_j c_i c_j (\mathbf{u}^i)^T \mathbf{u}^j \\ &= |c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2, \end{aligned}$$

mas

$$M\mathbf{u} = \sum_i c_i \mu_i \mathbf{u}^i,$$

então

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T M\mathbf{u} &= \sum_i c_i \mu_i \sum_j c_j (\mathbf{u}^i)^T \mathbf{u}^j \\ &= \mu_1 |c_1|^2 + \mu_2 |c_2|^2 + \cdots + \mu_n |c_n|^2 \\ &\leq \mu_1 (|c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2). \end{aligned}$$

Uma vez que foi mostrado previamente que

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2 = 1,$$

conclui-se que

$$\mathbf{u}^T M\mathbf{u} \leq \mu_1.$$

□

Teorema A.2.3 (Teorema de Gershgorin). *Todo autovalor μ associado a uma matriz $M = [m_{i,j}]$, de tamanho $n \times n$, satisfaz, pelo menos, uma das seguintes desigualdades*

$$|\mu - m_{i,i}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} m_{i,j} \text{ com } 1 \leq i \leq n. \quad (\text{A.3})$$

Demonstração

Seja $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ autovetor associado ao autovalor μ e $|\mathbf{u}_k| = \max_{1 \leq j \leq n} |\mathbf{u}_j|$. Considerando que μ é autovalor de M , tem-se

$$(\mu I - M)\mathbf{u} = 0,$$

e portanto

$$(\mu - m_{k,k})\mathbf{u} + \sum_{j \neq k} (-m_{k,j})\mathbf{u}_j = 0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} |\mu - m_{k,k}||\mathbf{u}_k| &= \left| \sum_{j \neq k} m_{k,j}\mathbf{u}_j \right| \\ &\leq \sum_{j \neq k} |m_{k,j}||\mathbf{u}_j| \\ &\leq \sum_{j \neq k} |m_{k,j}||\mathbf{u}_k|. \end{aligned}$$

Dividindo esta última por $|\mathbf{u}_k| > 0$, conclui-se que

$$|\mu - m_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |m_{k,j}|.$$

□

Corolário A.2.1. *Seja M uma matriz irredutível, de elementos não negativos, e μ um de seus autovalores. Então, para todo autovalor μ vale*

$$|\mu| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n m_{i,j}. \quad (\text{A.4})$$

APÊNDICE B – Combinatória

A seguir apresentamos resultados em combinatória utilizados nos capítulos anteriores desta dissertação. A fim de mais informações recomendamos consultar (GUIDOLI, 1996).

B.1 Propriedades

Propriedade B.1.1. *Dados $r \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $W \subset \{1, \dots, n\}$ temos*

$$\left(\sum_{i \in W} x_i \right)^r \leq |W|^{r-1} \sum_{i \in W} x_i^r. \quad (\text{B.1})$$

Demonstração

Basta notar que o primeiro lado da desigualdade é menor que a soma de todos os elementos com grau r vezes o arranjo de $|W|$ elementos tomados em grupos de $r - 1$ elementos. \square

Seguindo diretamente da desigualdade (B.1), tem-se a seguinte propriedade.

Propriedade B.1.2.

$$\left(\sum_{i \in W} x_i^a \right) \left(\sum_{i \in W} x_i^b \right) \leq |W| \sum_{i \in W} x_i^{a+b}. \quad (\text{B.2})$$

APÊNDICE C – “A spectral Turán Theorem”

Neste espaço apresentamos resultados de álgebra linear aplicada à matriz Laplaciana normalizada e os lemas propostos por Fan Chung em (CHUNG, 2005). Fornecemos o suporte teórico encontrado em (CHUNG, 1994), a fim de possibilitar a prova do Teorema 3.4.1.

C.1 Definições

Uma vez que \mathcal{L} é simétrica, seus autovalores são todos reais e não-negativos. Este fato pode ser verificado ao calcular o quociente de Rayleigh de \mathcal{L} considerando g uma autofunção que leva um vértice v de G em um valor real $g(v)$, da seguinte forma:

$$\frac{\langle g, \mathcal{L}g \rangle}{\langle g, g \rangle} = \frac{\langle g, D^{-1/2}LD^{-1/2}g \rangle}{\langle g, g \rangle}.$$

Note que quando se toma $f = D^{-1/2}g$ com $D^{-1/2}$ um operador autoadjunto obtêm-se a seguinte sucessão de igualdades, de forma que a afirmação feita acima é verificada.

$$\begin{aligned} \frac{\langle g, \mathcal{L}g \rangle}{\langle g, g \rangle} &= \frac{\langle D^{-1/2}g, LD^{-1/2}g \rangle}{\langle g, g \rangle} \\ &= \frac{\langle f, Lf \rangle}{\langle g, g \rangle} \\ &= \frac{\langle f, Lf \rangle}{\langle D^{1/2}f, D^{1/2}f \rangle} \\ &= \frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_{v \in V(G)} d(v)f(v)^2}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

De fato, tomando $\mathbf{1}$ o vetor de uns, têm-se que $D^{1/2}\mathbf{1}$ é uma autofunção de \mathcal{L} com autovalor 0.

Podemos também caracterizar os outros autovalores de \mathcal{L} em termos do quociente de Rayleigh, por exemplo, o maior autovalor satisfaz

$$\lambda_1(\mathcal{L}) = \sup_f \frac{\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\sum_{v \in V(G)} d(v)f(v)^2}. \tag{C.2}$$

C.2 Lemas

Lema C.2.1. *Suponha k um valor real (possivelmente negativo) e um grafo G com n vértices cujos autovalores Laplacianos normalizados $\lambda_i(\mathcal{L})$ satisfazem $\bar{\lambda} = \max_{i \neq n} |1 - \lambda_i(\mathcal{L})| <$*

uma vez que a matriz $\phi_0^T \phi_0$ possui espaço nulo de tamanho $n - 1$, ou seja, é uma matriz singular e, portanto, todos os seus auto valores são nulos.

E $\|I - \mathcal{L}\| < \delta$, do fato que $G \subseteq \mathcal{F}_\delta$, ou seja, $\max_{i \neq 0} |1 - \lambda_i(\mathcal{L})| < \delta$, e dado γ autovalor associado a matriz $I - \mathcal{L}$ têm-se

$$\begin{aligned} 0 &= \det[(I - \mathcal{L}) - \gamma I] \\ &= \det[(1 - \gamma)I - \mathcal{L}]. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = (1 - \gamma)$, temos que $\gamma = 1 - \lambda$, e

$$\begin{aligned} 0 &= \det[-(\mathcal{L} - \lambda I)] \\ &= (-1)^n \det[\mathcal{L} - \lambda I], \end{aligned}$$

logo λ é autovalor associado a \mathcal{L} .

Assim,

$$\|I - \mathcal{L}\| = \max_{i \neq n} |\gamma_i| = \max_{i \neq n} |1 - \lambda_i| < \delta.$$

Lembramos que,

$$\|D^{1/2} \psi_X\| = \sum_{u \in X} d(u)^{1/2} d(u)^k = \sqrt{\text{vol}_{2k+1}(X)}$$

e

$$\|D^{1/2} \psi_Y\| = \sum_{v \in Y} d(v)^{1/2} d(v)^k = \sqrt{\text{vol}_{2k+1}(Y)},$$

portanto,

$$\left| \langle \psi_X, D^{1/2}(I - \mathcal{L} - \phi_0^T \phi_0) D^{1/2} \psi_Y \rangle \right| \leq \sqrt{\text{vol}_{2k+1}(X)} \delta \sqrt{\text{vol}_{2k+1}(Y)}. \quad (\text{C.8})$$

□

O lema a seguir é uma consequência do lema apresentado acima quando tomamos $k = 0$, e, portanto, terá sua prova omitida.

Lema C.2.2. *Seja G um grafo com n vértices, $\lambda_i(\mathcal{L})$ os autovalores associados à sua matriz Laplaciana normalizada satisfazendo $\max_{i \neq n} |1 - \lambda_i(\mathcal{L})| < \delta$. Para quaisquer dois subconjuntos X e Y de vértices, $\hat{e}(X, Y)$ denota o número de pares ordenados (x, y) onde $\{x, y\}$ é uma aresta e $x \in X$ e $y \in Y$. Então $\hat{e}(X, Y)$ satisfaz*

$$\left| \hat{e}(X, Y) - \frac{\text{vol}(X)\text{vol}(Y)}{\text{vol}(G)} \right| \leq \delta \sqrt{\text{vol}(X)\text{vol}(Y)} \quad (\text{C.9})$$

Além da necessidade do Lema C.2.2 precisamos das seguintes estimativas.

Lema C.2.3. *Seja G um grafo com n vértices, cujos autovalores Laplacianos normalizados $\lambda_i(\mathcal{L})$ satisfazem $\bar{\lambda} = \max_{i \neq n} |1 - \lambda_i(\mathcal{L})| < \delta$. para qualquer valor real k e qualquer subconjunto X de vértices de G , temos*

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(\text{vol}_k(\Gamma_X(u)) - d(u) \frac{\text{vol}_{k+1}(X)}{\text{vol}(G)} \right)^2 \leq \delta^2 \text{vol}_{2k+1}(X). \quad (\text{C.10})$$

Demonstração

Seja

$$\psi_X(u) = \begin{cases} d(u)^k & \text{se } u \in X \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se

$$\|(I - \mathcal{L})D^{1/2}\psi_X\| \leq \|I - \mathcal{L}\| \|D^{1/2}\psi_X\|.$$

Sabe-se que

$$I - \mathcal{L} = D^{-1/2}AD^{-1/2}$$

e

$$\|I - \mathcal{L}\| \leq \delta$$

uma vez que $G \subseteq \mathcal{F}_\delta$, como já demonstrado na prova do **Lema C.2.1**, portanto

$$\|D^{-1/2}A\psi_X\| \leq \delta \|D^{1/2}\psi_X\|. \quad (\text{C.11})$$

Olhemos para a diferença entre $D^{-1/2}A\psi_X$ e a projeção de $D^{1/2}\psi(X)$ em $D^{1/2}\mathbf{1}$, com $\mathbf{1}$ vetor unitário, ou seja,

$$D^{-1/2}A\psi_X - \frac{\langle D^{1/2}\psi_X, D^{1/2}\mathbf{1} \rangle}{\text{vol}(G)} D^{1/2}\mathbf{1}. \quad (\text{C.12})$$

Em particular a equação (C.12) pode ser reescrita como

$$D^{-1/2}A\psi_X - \frac{\text{vol}_{k+1}(X)}{\text{vol}(G)} D^{1/2}\mathbf{1}. \quad (\text{C.13})$$

Supondo que $|X| = l$, esta equação pode ser representada matricialmente por

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{d(u_1)}} \sum_{u_1 \sim u_i} d(u_i)^k \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{d(u_l)}} \sum_{u_1 \sim u_i} d(u_i)^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\text{vol}_{k+1}(X)}{\text{vol}(G)} \sqrt{d(u_1)} \\ \vdots \\ \frac{\text{vol}_{k+1}(X)}{\text{vol}(G)} \sqrt{d(u_l)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando a norma vetorial $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^l x_i^2$, e notando que

$$\sum_{u_j \sim u_i} d(u_i)^k = \text{vol}_k(\Gamma_X(u_j))$$

para todo $1 \leq j \leq l$, têm-se

$$\begin{aligned} \left\| D^{-1/2} A\psi_X - \frac{\text{vol}_{k+1}(X)}{\text{vol}(G)} D^{1/2} \mathbf{1} \right\|^2 &= \sum_{i=1}^l \left(\frac{\text{vol}_k(\Gamma_X(u_i))}{\sqrt{d(u_i)}} - \frac{\text{vol}_{k+1}(X) \sqrt{d(u_i)}}{\text{vol}(G)} \right)^2 \\ &= \sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(\text{vol}_k(\Gamma_X(u)) - \frac{\text{vol}_{k+1}(X)}{\text{vol}(G)} d(u) \right)^2 \\ &\leq \sum_{u \in X} \left(\frac{\text{vol}_k(\Gamma_X(u))}{\sqrt{d(u)}} \right)^2 \\ &= \|D^{1/2} A\psi_X\|^2, \end{aligned}$$

logo

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(\text{vol}_k(\Gamma_X(u)) - \frac{\text{vol}_{k+1}(X)}{\text{vol}(G)} d(u) \right)^2 \leq \|D^{1/2} A\psi_X\|^2.$$

Pela desigualdade (C.11) juntamente com o fato de que

$$\|D^{1/2} \psi_X\|^2 = \sum_{u \in X} (d(u)^{1/2} d(u)^k)^2 = \text{vol}_{2k+1}(X)$$

obtêm-se o resultado desejado

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(\text{vol}_k(\Gamma_X(u)) - d(u) \frac{\text{vol}_{k+1}(X)}{\text{vol}(G)} \right)^2 \leq \delta^2 \text{vol}_{2k+1}(X).$$

□

Lema C.2.4. *Seja G um grafo com n vértices, autovalores Laplacianos normalizados $\lambda_i(\mathcal{L})$ satisfazendo $\bar{\lambda} = \max_{i \neq n} |1 - \lambda_1(\mathcal{L})| < \delta$. Seja X um subconjunto dos vértices de G e u um vértice em X , $\Gamma_X(u)$ a vizinhança de u em X e $R(u)$ um subconjunto de $\Gamma(u)$. Então*

$$\sum_{u \in X} \frac{|\Gamma_X(u)|^2}{d(u)} \geq \frac{\text{vol}^3(X)}{\text{vol}^2(G)} + O\left(\delta \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)}\right) + O(\delta^2 \text{vol}(X)) \quad (\text{C.14})$$

e

$$\sum_{u \in X} \frac{|\Gamma_X(u)||R(u)|}{d(u)} \leq \sum_{u \in X} \frac{|R(u)|\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} + O\left(\delta \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)}\right) + O(\delta^2 \text{vol}(X)) \quad (\text{C.15})$$

Demonstração

A fim de demonstrar a desigualdade (C.14) note que

$$\begin{aligned} \sum_{u \in X} \frac{|\Gamma_X(u)|^2}{d(u)} &= \sum_{u \in X} \frac{d(u)\text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} + \sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)|^2 - \frac{d(u)^2 \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right) \\ &= \frac{\text{vol}^3(X)}{\text{vol}^2(G)} + \sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)|^2 - \frac{d(u)^2 \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Mostremos que

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)|^2 - \frac{d(u)^2 \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right) \geq O \left(\delta \frac{\text{vol}^2(G)}{\text{vol}(G)} \right) + O(\delta^2 \text{vol}(X)).$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)|^2 - \frac{d(u)^2 \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right) &= \\ & \sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)|^2 - 2|\Gamma_X(u)| \frac{d(u) \text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} + \frac{d(u)^2 \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right) \\ &+ \sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(2|\Gamma_X(u)| \frac{d(u) \text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} - 2 \frac{d(u)^2 \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u) \text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right)^2}_{=A} \\ &+ \underbrace{\sum_{u \in X} 2 \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \left(|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u) \text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right)}_{=B}. \end{aligned}$$

- Limitando o somatório A

Note que ao tomarmos $k = 0$ e $\text{vol}_0(\Gamma_X(u)) = |\Gamma_X(u)|$ no Lema C.2.3 obtêm-se a seguinte cota superior

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u) \text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right)^2 \leq \delta^2 \text{vol}(X).$$

Em particular este somatório é não negativo, portanto

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u) \text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right)^2 \geq -\delta^2 \text{vol}(X) \quad (\text{C.17})$$

- Limitando o somatório B

Do Lema C.2.2 com $X = Y$

$$\left| 0 - \frac{\text{vol}(X) \text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right| \leq \delta \text{vol}(X) \Rightarrow \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} \leq \delta \text{vol}(X)$$

Note que o somatório B pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \sum_{u \in X} \left(|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right) \\
&= 2 \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \left(\sum_{u \in X} |\Gamma_X(u)| - \sum_{u \in X} \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right) \\
&= 2 \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \left(\sum_{u \in X} d(u) - \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \sum_{u \in X} d(u) \right) \\
&= 2 \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \left(\text{vol}(X) - \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} \right) \\
&\leq 2 \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} (\text{vol}(X) - \delta \text{vol}(X)) \\
&= -2\delta \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} + 2 \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)}.
\end{aligned}$$

Em particular o somatório B é não negativo, mostremos.

Suponha

$$|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} = d(u) \left(1 - \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right) < 0,$$

logo

$$1 < \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)}$$

o que é um absurdo, uma vez que $\text{vol}(G) = \text{vol}(X) + \text{vol}(G \setminus X)$, ou seja, $\text{vol}(G) > \text{vol}(X)$, e portanto

$$1 > \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)}.$$

Logo,

$$\sum_{u \in X} 2 \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \left(|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right) \geq 2\delta \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} - 2 \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} \quad (\text{C.18})$$

Usando as cotas obtidas (C.17) e (C.18) em A e B, obtemos

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)|^2 - \frac{d(u)^2 \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right) \geq -\delta^2 \text{vol}(X) + 2\delta \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} - 2 \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)},$$

em particular,

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)|^2 - \frac{d(u)^2 \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right) \geq O(\delta^2 \text{vol}(X)) + O\left(\delta \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)}\right).$$

A fim de demonstrar a desigualdade (C.15) note que

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{u \in X} \frac{|R(u)|}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right) \right]^2 &= \sum_{u \in X} \frac{|R(u)|^2}{d(u)^2} \left(|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right)^2 \\
&\leq \sum_{u \in X} \frac{|R(u)|^2}{d(u)} \sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right)^2 \\
&\leq \delta^2 \text{vol}(X) \sum_{u \in X} \frac{|R(u)|^2}{d(u)}
\end{aligned}$$

garantida pelo Lema C.2.3 com $k = 0$ e $\text{vol}_0(\Gamma_X(u)) = |\Gamma_X(u)|$.

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{u \in X} \frac{|\Gamma_X(u)||R(u)|}{d(u)} &= \sum_{u \in X} \frac{|R(u)|\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} + \sum_{u \in X} \frac{|R(u)|}{d(u)} \left(|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right) \\ &\leq \sum_{u \in X} \frac{|R(u)|\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} + \delta \sqrt{\text{vol}(X) \sum_{u \in X} \frac{|R(u)|^2}{d(u)}}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Resta mostrar

$$\delta \sqrt{\text{vol}(X) \sum_{u \in X} \frac{|R(u)|^2}{d(u)}} \leq O(\delta^2 \text{vol}(X)) + O\left(\frac{\delta \text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)}\right).$$

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{|R(u)|^2}{d(u)} &= \\ &\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left[|R(u)|^2 - 2 \frac{|R(u)|d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} + \frac{d(u)^2 \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right] \\ &+ \sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left[2 \frac{|R(u)|d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} - \frac{d(u)^2 \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right] \\ &= \\ &\underbrace{\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left[|R(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right]^2}_A \\ &+ \underbrace{\sum_{u \in X} \left[2 \frac{|R(u)|\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} - \frac{d(u)\text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right]}_B \end{aligned}$$

- Limitando o somatório A

Pelo Lema C.2.3 com $k = 0$ e $\text{vol}_0(|\Gamma_X(u)|) = |\Gamma_X(u)|$, temos

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left[|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right]^2 \leq \delta^2 \text{vol}(X).$$

E, por hipótese, $R(u) \subseteq \Gamma_X(u)$, logo

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left[|R(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right]^2 \leq \sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left[|\Gamma_X(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right]^2.$$

Assim, combinado estas desigualdades obtemos a seguinte cota de A

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)} \left[|R(u)| - \frac{d(u)\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \right]^2 \leq \delta^2 \text{vol}(X) \quad (\text{C.20})$$

- Limitando o somatório B

Note que,

$$\begin{aligned} \sum_{u \in X} \left[2 \frac{|R(u)| \text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} - \frac{d(u) \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right] &= 2 \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \sum_{u \in X} |R(u)| - \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \sum_{u \in X} d(u) \\ &= 2 \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \sum_{u \in X} |R(u)| - \frac{\text{vol}^3(X)}{\text{vol}^2(G)}. \end{aligned}$$

Uma vez que, $R(u) \subseteq \Gamma_X(u)$ tem-se $|R(u)| \leq |\Gamma_X(u)|$, e, portanto

$$\begin{aligned} \sum_{u \in X} \left[2 \frac{|R(u)| \text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} - \frac{d(u) \text{vol}^2(X)}{\text{vol}^2(G)} \right] &\leq 2 \frac{\text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} \sum_{u \in X} |\Gamma_X(u)| - \frac{\text{vol}^3(X)}{\text{vol}^2(G)} \\ &\leq 2 \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} - \frac{\text{vol}^3(X)}{\text{vol}^2(G)}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Usando as cotas obtidas (C.20) e (C.21) em A e B, e multiplicando a desigualdade por $\text{vol}(X)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{vol}(X) \frac{|R(u)|^2}{d(u)} &\leq \delta^2 \text{vol}^2(X) + 2 \frac{\text{vol}^3(X)}{\text{vol}(G)} - \frac{\text{vol}^4(X)}{\text{vol}^2(G)} \\ &= \left[\delta \text{vol}(X) + \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} \right]^2 + 2(1 - \delta) \frac{\text{vol}^3(X)}{\text{vol}(G)} - 2 \frac{\text{vol}^4(X)}{\text{vol}^2(G)} \\ &\simeq \left[\delta \text{vol}(X) + \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} \right]^2 + c(\delta), \end{aligned}$$

com $c(\delta)$ uma constante que depende de δ .

Tomando δ vezes a raiz da última desigualdade acima conseguimos observar o seguinte

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{\text{vol}(X) \frac{|R(u)|^2}{d(u)}} &\leq \delta \sqrt{\left[\delta \text{vol}(X) + \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} \right]^2 + c_\delta} \\ &= \sqrt{\left[\delta^2 \text{vol}(X) + \frac{\delta \text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)} \right]^2 + c(\delta^3)} \\ &\leq O\left(\delta^2 \text{vol}(X)\right) + O\left(\frac{\delta \text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{u \in X} \frac{|\Gamma_X(u)| |R(u)|}{d(u)} \leq \sum_{u \in X} \frac{|R(u)| \text{vol}(X)}{\text{vol}(G)} + O\left(\delta \frac{\text{vol}^2(X)}{\text{vol}(G)}\right) + O(\delta^2 \text{vol}(X)).$$

□

Uma generalização útil do Lema C.2.4 é o seguinte

Lema C.2.5. *Seja G um grafo com n vértices, λ_i seus autovalores Laplacianos normalizados satisfazendo $\bar{\lambda} = |1 - \lambda_i| < \delta$. Suponha X um subconjunto de vértices de G e i um valor não negativo. Então*

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)^{i+1}} \text{vol}_{-i}^2(\Gamma_X(u)) \geq \frac{\text{vol}_{-i+1}^3(X)}{\text{vol}^2(G)} + O\left(\delta \frac{\text{vol}_{-i+1}(X)\text{vol}_{-2i+1}(X)}{\text{vol}(G)}\right) \quad (\text{C.22})$$

e

$$\sum_{u \in X} \frac{1}{d(u)^{i+1}} \text{vol}_{-i}(\Gamma_X(u)) \text{vol}_{-i}(R(u)) \leq \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{\text{vol}_{-i+1}(X)}{\text{vol}(G)} \sum_{u,v \in X} \frac{1}{d(u)^i d(v)^i} + O\left(\bar{\lambda} \frac{\text{vol}_{-i+1}(X)\text{vol}_{-2i+1}(X)}{\text{vol}(G)}\right).$$

Não apresentaremos a demonstração deste lema, uma vez que esta decorre da generalização dos passos seguidos para a demonstração do C.2.4.

Por fim apresentamos o último lema necessário à demonstração do Teorema 3.4.1 cuja demonstração utiliza a desigualdade de soma de potências proposta no exercício 12.4 de Steele (2004), facilmente demonstrada usando as propriedades de logaritmos.

Lema C.2.6. *Seja X um subconjunto de vértices de G e $\alpha \leq \beta$ valores não negativos. Então*

$$\text{vol}_{-\alpha}(X)\text{vol}_{-\beta}(X) \leq \text{vol}_{-\alpha+1}(X)\text{vol}_{-\beta-1}(X). \quad (\text{C.24})$$

Demonstração

A desigualdade (C.24) segue diretamente da seguinte versão geral da desigualdade de Cauchy-Schwarz para x_i , $1 \leq i \leq n$, números positivos e $0 \leq \alpha \leq \beta$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^\alpha\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^\beta\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\beta+1}\right),$$

onde as entradas x_i correspondem aos graus $d(v_i)$. □

Índice

- k -coloração, 36
- k -volume, 35
- q -índice, 42
- t -degenerado, 53
- Árvore, 36
- Índice, 42
- “Join”/Junção, 33

- Adição de vértice/aresta, 33
- Adjacente, 32
- Aresta, 32

- Caminho, 36
- Ciclo, 36
- Classe de coloração, 37
- Clique, 36

- Deleção de vértice, 33
- Desigualdade de Bernoulli, 74
- Double Counting, 54

- Família de grafos \mathcal{F}_δ , 63

- Grafo, 32
- Grafo r -partido, 34
- Grafo r -partido completo, 34
- Grafo bipartido, 34
- Grafo complementar, 33
- Grafo completo, 34
- Grafo composto por um único vértice, e sem arestas, 33
- Grafo conexo, 36
- Grafo de Turán, 48
- Grafo estrela, 34
- Grafo fortemente regular, 35
- Grafo livre, 47
- Grafo não direcionado, 32

- Grafo regular, 35
- Grafo simples, 32
- Grau do vértice, 35
- Grau mínimo, 35
- Grau máximo, 35
- Grau médio, 35

- Homomorfismo entre grafos, 37

- Matrix de adjacência, 38
- Matriz diagonal, 38
- Matriz Laplaciana, 38
- Matriz Laplaciana normalizada, 39
- Matriz Laplaciana sem sinal, 39

- Número Cromático, 37
- Número de arestas, 32
- Número de clique, 36
- Número de Turán, 47
- Número de Zarankiewicz, 48

- Ordem, 32

- Passeio, 36
- Princípio de Rayleigh, 106

- Quociente de Rayleigh, 106

- Raio espectral, 42

- Subgrafo, 34
- Subgrafo induzido, 34

- Teorema de Gershgorin, 107

- Vértice, 32
- Vizinhança, 32
- Vizinho, 32
- Volume, 35