



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Matheus Tissot

**Efeito da anisotropia do feixe na interação  
feixe-plasma bidimensional na teoria da  
turbulência fraca**

Porto Alegre - RS

2023

Matheus Tissot

**Efeito da anisotropia do feixe na interação feixe-plasma  
bidimensional na teoria da turbulência fraca**

Trabalho de conclusão de curso realizado sob orientação do Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell

Porto Alegre - RS

2023

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e a minha irmã, por todo o apoio que me deram ao longo da minha vida, sempre me providenciando as melhores oportunidades, e acreditando no meu potencial. Amo vocês.

Agradeço à minha namorada, Eduarda, por todo apoio moral e emocional que sempre me deu. A vida é mais fácil e divertida do teu lado. Obrigado por ser minha melhor amiga, sempre acreditar em mim, e me incentivar a ir atrás dos meus objetivos. Te amo demais!

Agradeço ao meu orientador, que se dispôs a me orientar e me auxiliar nessa jornada. Obrigado pelos ensinamentos, por acreditar em mim, e pela disposição infinita em ajudar. Ser orientado por um pesquisador tão competente é muito gratificante, e uma grande fonte de orgulho.

Agradeço aos amigos. Aos de longa data: obrigado por estarem sempre comigo. Aos que a faculdade me proporcionou: obrigado por estarem nessa comigo, seja no estudo, nas conversas sérias ou nas brincadeiras. Guardo todos comigo.

# Resumo

Este trabalho busca investigar o efeito da anisotropia de temperatura de um feixe de plasma que interage com um plasma de fundo, tanto na evolução da função de distribuição de velocidades, quanto nos espectros das ondas, no contexto da teoria de turbulência fraca. Para isso, primeiro será mostrado como se descreve um plasma de forma exata, e como a descrição estatística do plasma nos faz chegar na equação de Vlasov, equação utilizada para descrever plasmas não colisionais. Depois, serão mostradas as teorias linear, quase-linear e da turbulência fraca, e como essas trazem mais informação aos sistemas físicos. Por fim, serão mostrados os resultados obtidos com diferentes valores de temperatura perpendicular e paralela do feixe, e será discutido o efeito que essa variação de temperatura causa na evolução temporal da função distribuição e do espectro das ondas de Langmuir. Por fim, será mostrado que a intensidade máxima do espectro das ondas de Langmuir depende da temperatura paralela do feixe,  $T_b$ , seguindo uma lei de potência. No futuro, o objetivo da pesquisa é aprimorar o código numérico e usar o modelo anisotrópico para analisar anisotropias medidas no vento solar.

**Palavras-chave:** Plasmas, teoria cinética, turbulência fraca, anisotropia, interação feixe-plasma

# Abstract

This work aims to investigate the effect of temperature anisotropy of a plasma beam when interacting with a background plasma, both in the evolution of the velocity distribution function, and on the wave spectra, in the context of the weak turbulence theory. To do that, firstly it will be presented how to describe a plasma exactly, and how to get to the Vlasov equation, the equation used to describe non-collisional plasmas. Then, the linear, quasi-linear and weak turbulence theories will be presented, and how these different theories shine new light on physical systems. Finally, the results obtained with different parallel and perpendicular temperatures of the beam, and how this temperature variation changes the time evolution of the distribution function and the Langmuir wave spectra. At the end, it will be presented how the maximum intensity of the Langmuir wave spectra depends on the beam parallel temperature,  $T_b$ , as a power law. In the future, the main goal of this research is to improve the code and use the anisotropic model to analyze solar wind anisotropies.

**Keywords:** Plasmas, kinetic theory, weak turbulence, anisotropy, plasma-beam interaction

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Curva maxwelliana . . . . .	14
Figura 2 – Distribuição bump in tail . . . . .	17
Figura 3 – Evolução temporal da distribuição bump in tail . . . . .	18
Figura 4 – Função distribuição $F_e$ no caso em que $T_b = 3$ e $T_b = 1$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 2000$ . . . . .	25
Figura 5 – a) Espectro das ondas de Langmuir no caso em que $T_b = 3$ e $T_b = 1$ nos tempos $\tau = 500$ e b) $\tau = 2000$ . . . . .	25
Figura 6 – Função distribuição $F_e$ no caso em que $T_b = 1$ e $T_b = 3$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 2000$ . . . . .	26
Figura 7 – Espectro das ondas de Langmuir no caso em que $T_b = 1$ e $T_b = 3$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 2000$ . . . . .	26
Figura 8 – Função distribuição $F_e$ no caso em que $T_b = 1$ e $T_b = 0.3$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 2000$ . . . . .	27
Figura 9 – Espectro das ondas de Langmuir no caso em que $T_b = 1$ e $T_b = 0.3$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 2000$ . . . . .	28
Figura 10 – Função distribuição $F_e$ no caso em que $T_b = 0.3$ e $T_b = 1$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 2000$ . . . . .	28
Figura 11 – Espectro das ondas de Langmuir no caso em que $T_b = 0.3$ e $T_b = 1$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 2000$ . . . . .	29
Figura 12 – Função distribuição $F_e$ no caso em que $T_b = 3$ e $T_b = 0.3$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 2000$ . . . . .	29
Figura 13 – Espectro das ondas de Langmuir no caso em que $T_b = 3$ e $T_b = 0.3$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 2000$ . . . . .	30
Figura 14 – Função distribuição $F_e$ no caso em que $T_b = 0.3$ e $T_b = 3$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 900$ . . . . .	31
Figura 15 – Espectro das ondas de Langmuir no caso em que $T_b = 0.3$ e $T_b = 3$ nos tempos a) $\tau = 0$ e b) $\tau = 900$ . . . . .	31
Figura 16 – Logaritmo natural do valor máximo da intensidade do espectro das ondas $L$ em $\tau = 500$ para diferentes valores de temperatura $T_b / T_e$ , e lei de potência que melhor ajusta os pontos. . . . .	32

# Sumário

	<b>Lista de ilustrações</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>TEORIA CINÉTICA DE PLASMAS</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>2.1</b>	<b>Descrição exata de um plasma</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1.1	Primeiro termo . . . . .	4
2.1.2	Segundo termo . . . . .	5
2.1.3	Coletando os termos . . . . .	5
<b>2.2</b>	<b>Descrição estatística de um plasma</b> . . . . .	<b>6</b>
2.2.1	Primeiro termo . . . . .	6
2.2.2	Segundo termo . . . . .	7
2.2.3	Terceiro termo . . . . .	7
<b>2.3</b>	<b>Sistema Vlasov-Maxwell</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>ONDAS EM PLASMAS</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>3.1</b>	<b>Teoria Linear</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>3.2</b>	<b>Teoria Quase Linear</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>3.3</b>	<b>Teoria de Turbulência Fraca</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>ANÁLISE NUMÉRICA E RESULTADOS</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>4.1</b>	<b>Evolução da função distribuição e espectro das ondas <math>L</math> para diferentes temperaturas <math>T_b</math> e <math>T_e</math></b> . . . . .	<b>24</b>
4.1.1	$T_b / T_e = 3$ e $T_b / T_e = 1$ . . . . .	24
4.1.2	$T_b / T_e = 1$ e $T_b / T_e = 3$ . . . . .	26
4.1.3	$T_b / T_e = 1$ e $T_b / T_e = 0.3$ . . . . .	27
4.1.4	$T_b / T_e = 0.3$ e $T_b / T_e = 1$ . . . . .	28
4.1.5	$T_b / T_e = 3$ e $T_b / T_e = 0.3$ . . . . .	29
4.1.6	$T_b / T_e = 0.3$ e $T_b / T_e = 3$ . . . . .	30
<b>4.2</b>	<b>Intensidade máxima do espectro como função da temperatura paralela <math>T_b / T_e</math></b> . . . . .	<b>32</b>
<b>5</b>	<b>COMENTÁRIOS FINAIS</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>A</b>	<b>PROPORCIONALIDADE DO VALOR MÁXIMO DO ESPECTRO DAS ONDAS <math>L</math> COM A TEMPERATURA PARALELA DO FEIXE</b> . . . . .	<b>34</b>

**Bibliografia . . . . . 36**



# 1 Introdução

Plasmas são comumente chamados de quarto estado da matéria, pois assim como um líquido surge quando fornecemos energia a um sólido, e um gás surge quando fornecemos energia a um líquido, plasmas surgem quando fornecemos energia a um gás, e o tornamos ionizado. Apesar de na Terra não serem comuns, presentes em eventos como raios e auroras boreais, 99,9% da matéria bariônica do universo está no estado de plasma, seja em estrelas, no meio interestelar, ou no meio intergalático. [1]

Por conta dessa abundância no universo, a física de plasmas é essencial para entendermos a dinâmica de diversos processos que ocorrem no universo nas mais diversas escalas, e também para desenvolvermos tecnologia utilizando plasmas.

A definição de plasma é: um gás quase neutro de partículas carregadas que apresenta comportamento coletivo. [2]

quase neutro significa que o plasma possui aproximadamente a mesma densidade de partículas carregadas negativamente (elétrons) e partículas carregadas positivamente (íons). [2, 3]

Como o plasma não é completamente neutro, e como é constituído de partículas carregadas em movimento, há a geração de campos eletromagnéticos que influenciam o movimento dessas partículas. Essa dinâmica de partículas e campos afeta até partículas que estão distantes, devido à força de Coulomb, e por isso é dito que plasmas apresentam "comportamento coletivo". Além disso, plasmas apresentam a "blindagem de Debye". Qualquer carga irá atrair cargas de sinal oposto, e repelir cargas de sinal igual. Isso acaba diminuindo a influência que uma carga tem no plasma, que acaba tendo sua influência limitada pelo "comprimento de Debye", que é definido no sistema CGS como [1, 2, 4]

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{8\pi n q_e^2}} \quad (1.1)$$

onde  $n$  é a densidade dos íons ou elétrons,  $T$  é a temperatura em unidades de energia, e  $q_e$  é a carga de um elétron.

Sabendo que plasmas compreendem 99,9% da matéria bariônica do universo, fica claro o porquê é interessante estudar a interação feixe-plasma. Qualquer mecanismo no universo que gere feixes de plasma, tende a interagir com outros plasmas de alguma forma.

Por exemplo: o Sol, e estrelas no geral, estão constantemente expelindo partículas de suas superfícies. Essa enxurrada de partículas que sai das estrelas em todas as direções, é chamada de vento solar, e é formado de partículas carregadas. No seu caminho, o vento solar (feixe) encontra o meio interestelar - um plasma rarefeito com gás, poeira e

partículas carregadas - (plasma de fundo) e essa interação tem uma dinâmica interessante. Na região de interação do feixe com o plasma de fundo, fenômenos como choques, geração e amplificação de ondas, acontecem com frequência.

A teoria de turbulência fraca é utilizada para analisar sistemas físicos incorporando efeitos não lineares de baixa ordem, chegando num conjunto de equações que descrevem a evolução da função distribuição e do espectro das ondas, além de interações entre essas ondas.

Evidências de que o vento solar possui anisotropia de temperatura já existem há um tempo [5, 6] e sabemos hoje que essa anisotropia de temperatura varia com a distância do Sol [7].

Por conta disso, neste trabalho será utilizado um modelo de feixe Maxwelliano anisotrópico, e será analisado o efeito da anisotropia na evolução da função distribuição e espectro das ondas do sistema, dentro do contexto da teoria da turbulência fraca.

## 2 Teoria cinética de plasmas

Neste capítulo será abordado um breve resumo da teoria cinética de plasmas, visando mostrar os caminhos tomados para se chegar na equação de Vlasov, que será objeto de estudo dos próximos capítulos, quando analisaremos ondas em plasmas.

### 2.1 Descrição exata de um plasma

Como abordado no capítulo 1 deste trabalho, plasmas são formados por partículas carregadas, e sua dinâmica não é nada trivial, já que se têm campos elétricos e magnéticos gerados pelas próprias partículas, que afetam umas às outras. Apesar disso, é possível ter uma descrição exata de um plasma. O estado de uma partícula é totalmente descrito por uma posição e uma velocidade. Sabendo onde uma partícula está agora, e para onde sua velocidade aponta, sabemos onde ela estará no futuro. Essa descrição exata pode ser escrita de forma compacta como

$$N_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i) \quad (2.1)$$

onde  $N_i$  define o estado atual de uma partícula,  $\mathbf{X}_i$  e  $\mathbf{V}_i$  são a posição e a velocidade da partícula, respectivamente.

Se quisermos a evolução do estado da partícula, ao invés de utilizarmos a posição e velocidades fixas da partícula, usamos a sua órbita e evolução da velocidade, como

$$N_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t))\delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) \quad (2.2)$$

Essa equação descreve exatamente a evolução de uma partícula. É possível entender perfeitamente a evolução temporal dela, basta calcular  $N_i$  no espaço de posições e velocidades (3 dimensões de posição, 3 dimensões de velocidade, totalizando 6 dimensões).

E é possível evoluir as órbitas  $\mathbf{X}_i(t)$  e  $\mathbf{V}_i(t)$  utilizando equações de movimento para partículas carregadas, como

$$\frac{d\mathbf{X}_i(t)}{dt} = \mathbf{V}_i(t) \quad (2.3)$$

$$m\frac{d\mathbf{V}_i(t)}{dt} = q \left[ \mathbf{E}^m + \frac{\mathbf{V}_i(t) \times \mathbf{B}^m}{c} \right] \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{E}^m$  e  $\mathbf{B}^m$  são os campos elétrico e magnético microscópicos, sentidos localmente por uma partícula na posição  $\mathbf{X}_i(t)$ .

Essa descrição é exata e pode ser útil, mas quando buscamos descrever plasmas, tanto naturais quanto de laboratório, estamos falando de muitas partículas, então a descrição

de uma partícula não é uma boa ferramenta para descrever o sistema inteiro. Podemos tornar a descrição que temos até agora em uma descrição de muitas partículas, somando sobre o número total de partículas.

De forma mais completa, para descrever a densidade de um plasma de  $N_0$  partículas da espécie  $s$  (espécie pode ser próton, elétron, etc), usamos

$$N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_i^{N_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) \quad (2.5)$$

Podemos analisar a evolução temporal da densidade, fazendo

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_i^{N_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \sum_i^{N_0} \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t))}{\partial t} \quad (2.7)$$

Utilizando a regra do produto, temos

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \sum_i^{N_0} \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t))}{\partial t} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) + \sum_i^{N_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \frac{\partial \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t))}{\partial t} \quad (2.8)$$

Vamos agora manipular essa equação termo a termo, começando pelo primeiro termo do lado direito.

### 2.1.1 Primeiro termo

Utilizando a regra da cadeia, temos

$$\sum_i^{N_0} \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t))}{\partial(-\mathbf{X}_i)} \cdot \underbrace{\frac{\partial(-\mathbf{X}_i(t))}{\partial t}}_{-\dot{\mathbf{X}}_i(t)} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) \quad (2.9)$$

$$- \sum_i^{N_0} \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t))}{\partial \mathbf{X}_i} \cdot (-\dot{\mathbf{X}}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) \quad (2.10)$$

E utilizando regras de derivadas comuns, podemos reescrever a primeira derivada como

$$- \sum_i^{N_0} \underbrace{\frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t))}{\partial \mathbf{X}_i}}_{-\frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t))}{\partial \mathbf{x}}} \cdot (-\dot{\mathbf{X}}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) \quad (2.11)$$

Assim, o primeiro termo da equação 2.8 é escrito como

$$- \sum_i^{N_0} \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{V}_i(t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) \quad (2.12)$$

### 2.1.2 Segundo termo

Utilizando o mesmo procedimento do primeiro termo, começamos com a regra da cadeia

$$\sum_i^{N_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \frac{\partial \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t))}{\partial(-\mathbf{V}_i)} \cdot \underbrace{\frac{\partial(-\mathbf{V}_i(t))}{\partial t}}_{-\dot{\mathbf{V}}_i(t)} \quad (2.13)$$

$$- \sum_i^{N_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \frac{\partial \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t))}{\partial \mathbf{V}_i} \cdot (-\dot{\mathbf{V}}_i(t)) \quad (2.14)$$

Utilizando regras de derivadas comuns, temos

$$- \sum_i^{N_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \underbrace{\frac{\partial \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t))}{\partial \mathbf{V}_i}}_{-\frac{\partial \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t))}{\partial \mathbf{v}}} \cdot (-\dot{\mathbf{V}}_i(t)) \quad (2.15)$$

E então, substituindo  $\dot{\mathbf{V}}_i(t)$  por 2.4, temos

$$- \sum_i^{N_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \frac{\partial \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t))}{\partial \mathbf{v}} q \left[ \mathbf{E}^m + \frac{\mathbf{V}_i(t) \times \mathbf{B}^m}{c} \right] \quad (2.16)$$

### 2.1.3 Coletando os termos

Reorganizando esses termos na equação 2.8, temos

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = - \sum_i^{N_0} \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t))}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{V}_i(t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) \quad (2.17)$$

$$- \sum_i^{N_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \frac{\partial \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t))}{\partial \mathbf{v}} q \left[ \mathbf{E}^m + \frac{\mathbf{V}_i(t) \times \mathbf{B}^m}{c} \right] \quad (2.18)$$

Olhando para esta equação fica fácil perceber que temos a definição de  $N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  (2.5) em comum do lado direito.

Assim, após substituir  $\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{V}_i \rightarrow \mathbf{v}$  (graças às funções delta) reescrevemos a equação acima como

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} \left[ \mathbf{E}^m + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^m}{c} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (2.19)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{x}}$  e  $\nabla_{\mathbf{v}}$  são derivadas em respeito às coordenadas espaciais e de velocidade, respectivamente.

A equação (2.19) é chamada de *equação de Klimontovich* [8], e é uma equação que descreve exatamente a evolução temporal de um sistema de  $N_0$  partículas.

Esse sistema ainda é extremamente custoso para se resolver. Cada partícula tem 6 coordenadas que evoluem, então, nosso sistema será um sistema de  $6N_0$  equações. Até

mesmo para plasmas pouco densos isso se torna inviável, dado o número de equações a serem resolvidas para se obter a evolução do sistema inteiro.

Por isso, utilizamos métodos estatísticos, nos preocupando somente com as médias das quantidades de interesse do sistema.

## 2.2 Descrição estatística de um plasma

Na equação de Klimontovich temos 3 quantidades que são dependentes do movimento de partículas singulares, ao invés da média do sistema. Essas três quantidades são:  $N_s$ ,  $\mathbf{E}^m$  e  $\mathbf{B}^m$ .

Podemos supor que essas quantidades singulares, são compostas por uma média do sistema inteiro, mais um termo de desvio da média, devido ao movimento singular de uma partícula. Por exemplo

$$N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \delta N \quad (2.20)$$

$$\mathbf{E}^m = \mathbf{E} + \delta \mathbf{E} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{B}^m = \mathbf{B} + \delta \mathbf{B} \quad (2.22)$$

Como a média temporal de  $N_s$  é  $f_s$ , temos que a média temporal de  $\delta N$  será zero, e o mesmo pode ser feito para as outras quantidades, nos dando que a média temporal dos desvios é nula ( $\delta N = \delta \mathbf{E} = \delta \mathbf{B} = 0$ ).

Dessa forma, podemos substituir as quantidades singulares (2.20, 2.21, 2.22) na equação de Klimontovich (2.19), e realizar uma média temporal.

$$\left\langle \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} \left[ (\mathbf{E} + \delta \mathbf{E}) + \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \delta \mathbf{B})}{c} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) (f_s + \delta N) \right\rangle = 0 \quad (2.23)$$

Analisando essa equação termo a termo (podemos fazer isso pois não há correlação entre os três termos dentro do parênteses maior), teremos:

### 2.2.1 Primeiro termo

Analisar o termo da derivada temporal é bastante simples. Primeiro tomamos a média total da derivada de  $N_s$ , e depois separamos em dois termos

$$\left\langle \frac{\partial(f_s + \delta N)}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f_s}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \delta N}{\partial t} \right\rangle \quad (2.24)$$

O primeiro termo será simplesmente  $\frac{\partial f_s}{\partial t}$ , já que a média temporal de  $f_s$  é justamente  $f_s$ . Já o segundo termo será zero, já que  $\delta N = 0$ . Com isso, o primeiro termo será

$$\left\langle \frac{\partial(f_s + \delta N)}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (2.25)$$

### 2.2.2 Segundo termo

De forma parecida com o primeiro termo, o segundo termo também será fácil de analisar:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(f_s + \delta N) &= \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \delta N \\
 &= \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \delta N \\
 &= \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

aqui podemos tirar o operador  $\nabla_{\mathbf{x}}$  de dentro da média, pois a média é temporal, e não afeta as coordenadas espaciais.

### 2.2.3 Terceiro termo

O terceiro termo será o que nos dará mais trabalho, já que há produto de quantidades correlacionadas, como  $\delta N$  e  $\delta \mathbf{E}$ .

$$\left\langle \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E} + \delta \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \delta \mathbf{B})}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f_s + \delta N) \right\rangle \tag{2.27}$$

Nessa equação, temos um total de 8 termos. Abrindo essa equação termo a termo (aqui vamos ocultar  $\frac{q_s}{m_s}$ , já que é comum a todos os termos, e no final iremos recuperá-lo), temos

$$\begin{aligned}
 &\left\langle \left( \mathbf{E} + \delta \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \delta \mathbf{B})}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f_s + \delta N) \right\rangle = \\
 &= \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s + \delta \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s \\
 &+ \left\langle \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s \right\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s \right\rangle \\
 &+ \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N + \delta \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N \\
 &+ \left\langle \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N \right\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N \right\rangle
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Aqui, será possível cancelar vários termos, graças a propriedade de que a média do produto de quantidades descorrelacionadas é o produto das médias, já que uma quantidade é independente da outra. Na equação acima, as quantidades descorrelacionadas são os desvios ( $\delta N$ ,  $\delta \mathbf{E}$ ,  $\delta \mathbf{B}$ ) e as médias ( $f_s$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) das quantidades de interesse. É possível enxergar esse fato se pensarmos que um desvio no campo elétrico  $\delta \mathbf{E}$  não pode ser gerado pela distribuição média  $f_s$ , já que, por definição, a média  $f_s$  só gera o campo médio  $\mathbf{E}$ . Dessa forma, todos os termos que são  $Q\delta P$  podem ser reescritos como  $Q \delta P$  (onde  $Q$  e  $P$  são quantidades de interesse descorrelacionadas), então todos esses termos serão nulos, já que  $\delta N = \delta \mathbf{E} = \delta \mathbf{B} = 0$ .

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left( \mathbf{E} + \delta\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f_s + \delta N) \right\rangle = \\
& = \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s + \cancel{\delta\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s} \\
& + \left\langle \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s \right\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{v} \times \delta\mathbf{B}}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s \right\rangle \\
& + \cancel{\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N} + \delta\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N \\
& + \left\langle \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N \right\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{v} \times \delta\mathbf{B}}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Dessa forma, nos sobra

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left( \mathbf{E} + \delta\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f_s + \delta N) \right\rangle = \\
& = \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s \\
& + \left\langle \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s \right\rangle \\
& + \delta\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N \\
& + \left\langle \frac{\mathbf{v} \times \delta\mathbf{B}}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Os produtos das médias, como  $\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s$  e  $\mathbf{v} \times \nabla_{\mathbf{v}} f_s$  são simplesmente  $\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s$  e  $\mathbf{v} \times \nabla_{\mathbf{v}} f_s$ , pois já estamos lidando com médias. Dessa forma, podemos reescrever o que temos até agora de forma mais compacta

$$\left\langle \left( \mathbf{E} + \delta\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \delta\mathbf{B})}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}(f_s + \delta N) \right\rangle = \tag{2.31}$$

$$= \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s \tag{2.32}$$

$$+ \left\langle \frac{q_s}{m_s} \left( \delta\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \delta\mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N \right\rangle \tag{2.33}$$

Juntando os três termos que analisamos até agora, depois de realizar a média das quantidades de interesse, ficamos com

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_s = - \left\langle \frac{q_s}{m_s} \left( \delta\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \delta\mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta N \right\rangle \tag{2.34}$$

A equação acima é chamada de *equação cinética de plasmas*, e ela descreve estatisticamente a evolução temporal de um plasma. O lado esquerdo dessa equação depende somente de médias do sistema, que são quantidades contínuas, suaves. Já do lado direito, temos produtos de quantidades que não são nada suaves, são produtos de variações locais e pequenas nas quantidades de interesse. Esse termo é de difícil análise.



Como esse termo depende de quantidades que são desvios das médias, fica claro que este termo depende do movimento individual das partículas, que é afetado por colisões. Por essa razão, este termo muitas vezes não é escrito de forma detalhada como foi feito acima, e é simplesmente chamado de "termo de colisões"

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_s = \left( \frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{coll} \quad (2.35)$$

Essa equação também é chamada de *equação de transporte de Boltzmann*.

Essa equação leva em conta as colisões um a um das partículas do plasma, que não são triviais de se descrever. Em plasmas quentes, é possível mostrar que a energia cinética média das partículas é muito maior que a energia de interação coulombiana entre elas, e então podemos tratar as colisões como negligenciáveis, zerando o termo do lado direito da equação. Dessa forma, obtemos a equação de Vlasov, que trata de plasmas não colisionais, e será o principal objeto de estudo desse trabalho

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_s = 0 \quad (2.36)$$

O procedimento tomado neste capítulo pode ser visto de forma mais rigorosa nas referências [1, 8]

## 2.3 Sistema Vlasov-Maxwell

A equação de Vlasov é de grande utilidade por si só, mas ela se torna ainda mais útil quando a utilizamos em conjunto com as equações de Maxwell adaptadas para uma distribuição de partículas. Dessa forma, formamos um sistema autoconsistente, em que os campos são calculados pelas equações de Maxwell, os campos evoluem a função distribuição, a função distribuição calcula os campos, etc.

Para podermos escrever as equações de Maxwell utilizando a função distribuição  $f$ , precisamos primeiro definir a relação que esta tem com quantidades que aparecem nas equações, como densidade de carga, e densidade de corrente.

Na forma original, a lei de Gauss é

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.37)$$

Precisamos definir uma forma de densidade de carga a partir da função distribuição. Como a função distribuição já nos fala sobre a densidade de partículas no espaço de fase (3 dimensões de espaço e 3 dimensões de velocidade), e a densidade de carga real nos dá informação sobre a distribuição de cargas no espaço, uma boa definição para a densidade de carga é

$$\rho_s = q_s \int d\mathbf{v} f_s \quad (2.38)$$

De forma similar, podemos fazer o mesmo com a densidade de corrente,

$$\mathbf{J}_s = q_s \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f_s \quad (2.39)$$

Com isso, podemos escrever o sistema de equações Vlasov-Maxwell de forma completa, sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s + \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = 0 \end{array} \right. \quad (2.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi q_s \int d\mathbf{v} f_s \end{array} \right. \quad (2.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (2.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi q_s}{c} \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f_s \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Este sistema será o sistema que utilizaremos para analisar ondas no próximo capítulo.

## 3 Ondas em plasmas

A equação de Vlasov é útil para descrever a evolução de uma distribuição de muitas partículas de um plasma, e podemos usá-la para analisar situações fora da situação de equilíbrio, como perturbações que dão origem à ondas.

Partículas que estão sujeitas a uma força restauradora, como uma mola, ou à gravidade (no caso de um pêndulo), quando são perturbadas do estado de equilíbrio, apresentam comportamento ondulatório. Distribuições de partículas também podem apresentar comportamento ondulatório se forem perturbadas.

Neste capítulo, veremos como diferentes perturbações das quantidades de interesse dão origem à diferentes tipos de ondas, e como diferentes tratamentos do sistema Vlasov-Maxwell trazem informação sobre a dinâmica do sistema

### 3.1 Teoria Linear

Numa primeira aproximação, vamos analisar ondas eletrostáticas de alta frequência, supondo um plasma homogêneo em que os campos médios  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$ , e que há somente uma perturbação no campo elétrico, ou seja,  $\mathbf{E}_1 \neq 0$  e  $\mathbf{B}_1 = 0$ . Para que essa perturbação exista, precisamos de uma perturbação na nossa função distribuição, que originalmente está em equilíbrio, e, por ser um estado de equilíbrio, não depende do tempo. Assim, nosso sistema de equações será

$$f_s = f_{s0}(\mathbf{v}) + f_{s1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 = 0 \quad (3.3)$$

onde, em uma quantidade  $Q = Q_0 + Q_1$ , o subscrito define a ordem do termo, e termos de ordem 0 representam médias do sistema, e termos de ordem 1 desvios da média, e que  $|Q_1| \ll 1$ . Colocando essas definições na equação (2.40), temos

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial (f_{s0} + f_{s1})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (f_{s0} + f_{s1}) + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} (f_{s0} + f_{s1}) = 0 \quad (3.5)$$

Se separarmos agora termos de ordem 0, 1 e 2 (produtos de quantidades  $Q_1.P_1$  são de ordem 2), temos

$$\epsilon^0 : \quad \frac{\partial f_{s0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{s0} = 0 \quad (3.6)$$

$$\epsilon^1 : \quad \frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0 \quad (3.7)$$

$$\epsilon^2 : \quad \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} = 0 \quad (3.8)$$

A equação de ordem  $\epsilon^0$  é uma equação que não nos traz nenhuma informação nova, já que nesse caso,  $f_{s0}$  é uma distribuição de um plasma em equilíbrio (não muda com o tempo), e homogêneo ( $\nabla_{\mathbf{x}} f_{s0} = 0$ ). A equação de ordem dois pode ser desprezada, pois nos diz que o produto de dois desvios é nulo (o que já esperávamos, quando assumimos que  $f_{s1} \ll f_{s0}$  e  $\mathbf{E}_1 \ll \mathbf{E}_0$ ). Por conta disso, iremos utilizar somente a equação de ordem um, juntamente com a lei de Gauss adaptada:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 4\pi q_s \int d\mathbf{v} f_{s1} \quad (3.9)$$

Se supusermos perturbações da forma de ondas planas, temos que

$$f_{s1} = |f_{s1}| \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{E}_1 = |\mathbf{E}_1| \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)\} \quad (3.11)$$

dessa forma, podemos calcular as derivadas temporais e espaciais de forma mais simples, usando  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ , e  $\nabla_{\mathbf{x}} \rightarrow i\mathbf{k}$ . Aplicando isso na equação de ordem  $\epsilon^1$  (3.7), temos

$$-i\omega f_{s1} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0 \quad (3.12)$$

Isolando  $f_{s1}$ , temos

$$i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) f_{s1} = -\frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} \quad (3.13)$$

$$f_{s1} = \frac{-iq_s/m_s}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} \quad (3.14)$$

Se usarmos a lei de Gauss para calcular  $\mathbf{E}_1$ , substituindo  $f_{s1}$  calculado acima, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 4\pi q_s n_s \int d\mathbf{v} f_{s1} \quad (3.15)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = -i4\pi q_s^2 n_s \int d\mathbf{v} \frac{m_s^{-1} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \quad (3.16)$$

como  $\mathbf{E}_1$  não depende de  $\mathbf{v}$ , podemos tirá-lo para fora da integral. Além disso, devido ao produto escalar de  $\mathbf{k}$  com  $\mathbf{E}_1$ , a única componente relevante dessa equação, é o componente de  $\mathbf{k}$  que é paralelo à  $\mathbf{E}_1$ . Assim, podemos reescrever  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = k_{\parallel} E_1$ . Dessa forma, o integrando da equação acima depende somente da velocidade paralela ao campo e  $k_{\parallel}$ , exceto pela distribuição  $f_s$ , que depende das três componentes da velocidade. Se definirmos

$\hat{f}_s(v) = \int d\mathbf{v} f_s(\mathbf{v})$ , eliminamos a dependência das outras componentes da velocidade, e dessa forma, podemos reescrever a última equação como

$$kE_1 = -E_1 \frac{4\pi q_s^2 n_s}{m_s} \int dv \frac{\partial_u \hat{f}_{s0}}{\omega - kv} \quad (3.17)$$

Tirando um  $k$  em evidência no denominador da integral, eliminando  $E_1$ , substituindo a constante que multiplica a integral pela frequência de plasma da espécie  $s$ ,  $\omega_s^2$  e substituindo  $v \rightarrow u$  (por conveniência de notação) temos

$$1 + \frac{\omega_s^2}{k^2} \int du \frac{\partial_u \hat{f}_{s0}}{\omega/k - u} = 0 \quad (3.18)$$

Até aqui, temos feito tudo de forma genérica, sem indicar qual a espécie de partículas que estamos falando. No caso específico, em que estivéssemos lidando com elétrons e íons, todos as quantidades com subscrito "s", seriam "i" ou "e". A partir de agora, vamos supor que as ondas tem frequência alta o suficiente que não dá tempo dos íons reagirem à perturbação (já que são  $1000x$  mais pesados que os elétrons). Dessa forma, a partir de agora podemos tornar a nossa relação de dispersão específica para elétrons, nos dando

$$1 + \frac{\omega_e^2}{k^2} \int du \frac{\partial_u \hat{f}_{e0}}{\omega/k - u} = 0 \quad (3.19)$$

essa equação claramente possui um polo em  $u = \omega/k$ . Não é trivial calcular uma integral deste tipo com um polo assim. A técnica utilizada para calculá-la é chamada de **contorno de Landau** (*Landau contour*), onde se contorna esse polo no plano complexo, a fim de evitar a singularidade. O procedimento de calcular essa integral exatamente, com todo o rigor necessário, utilizando o contorno de Landau, não se encaixa no escopo desse trabalho, e pode ser visto em livros texto que tratam sobre teoria cinética de plasmas, e outros trabalhos, como nas referências [1, 3, 9].

Aqui, de forma mais simples, vamos supor que  $\hat{f}_{e0}(u)$  é uma distribuição maxwelliana, da forma

$$\hat{f}_{e0}(u) = \frac{m_e}{2\pi T_e} \exp\left\{-\frac{m_e u^2}{2T_e}\right\} \quad (3.20)$$

onde  $T_e = k_B T_e$  e possui unidades de energia, e que a velocidade de fase da onda ( $\omega/k$ ) é muito maior que os valores de  $u$  para os quais  $\hat{f}_{e0}(u)$  é significativo. Dessa forma, garantimos que  $\hat{f}_{e0}(u = \omega/k)$  está tão avançado na cauda da maxwelliana (ver figura 1), que  $\partial_u \hat{f}_{e0}(u)|_{u=\omega/k} = 0$ , evitando que o polo em  $u = \omega/k$  seja um ponto problemático para a nossa integração.

Assim, podemos realizar a integração da equação 3.19 por partes:

$$\int du \frac{\partial_u \hat{f}_{e0}}{\omega/k - u} = \frac{\hat{f}_{e0}}{\omega/k - u} \Big|_- - \int du \frac{\hat{f}_{e0}}{(\omega/k - u)^2} \quad (3.21)$$

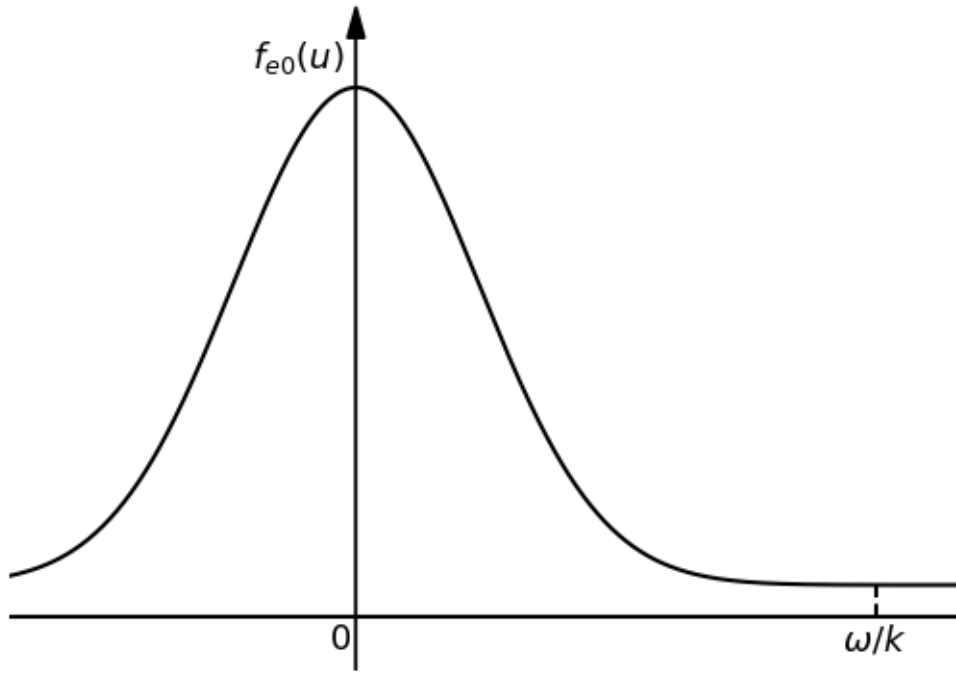


Figura 1 – Exemplo de uma curva maxwelliana, indicando uma velocidade de grupo  $\omega/k$  que está bem avançada na cauda da curva.

O primeiro termo será zero pois tanto  $\hat{f}_{e0}(u \pm \omega/k) = 0$  quanto  $\lim_{u \pm \omega/k} (\omega/k - u)^{-1} = 0$ . Essa nova forma da integral ainda não é muito útil. Podemos substituir o denominador  $(\omega/k - u)^2 = \frac{\omega^2}{k^2} (1 - uk/\omega)^2$ , e assim, podemos expandir o denominador dessa integral até segunda ordem, obtendo

$$1 - \frac{\omega_e^2 k^2}{k^2 \omega^2} \int du f_{e0} \left( 1 + \frac{2uk}{\omega} + \frac{3u^2 k^2}{\omega^2} + O\left(\frac{u^3 k^3}{\omega^3}\right) \right) = 0 \quad (3.22)$$

Integrando cada um desses termos, e lembrando que  $f_{e0}$  é uma maxwelliana, ficamos com

$$1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} - \frac{3v_e^2 k^2 \omega_e^2}{\omega^4} = 0 \quad (3.23)$$

onde  $v_e = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}$ . Isso nos dá um polinômio de segundo grau em que a variável é  $\omega^2$

$$(\omega^2)^2 - \omega_e^2 \omega^2 - 3v_e^2 k^2 \omega_e^2 = 0 \quad (3.24)$$

Resolvendo essa equação, e mantendo somente a raiz positiva  $\omega_+^2$  (pois  $\omega_-^2$  daria uma frequência imaginária), temos

$$\omega^2 = \omega_e^2 + 3v_e^2 k^2 \quad (3.25)$$

$$\omega = \omega_e \left( 1 + \frac{3v_e^2 k^2}{\omega_e^2} \right)^{1/2} = \omega_e \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{v_e^2 k^2}{\omega_e^2} \right) \quad (3.26)$$

Essa é a relação de dispersão para ondas de Langmuir, e essa equação concorda com a relação de dispersão obtida quando tratamos o plasma como um fluido e analisamos

ondas de alta frequência. Se levarmos em conta os íons, e analisarmos ondas de baixa frequência, chegamos na relação de dispersão de ondas íon-acústicas, e o procedimento pode ser encontrado em diversas referências padrão. [1, 9]

É importante salientar que o procedimento feito aqui, em que resolvemos a relação de dispersão somente para ondas de alta frequência, nos faz perder informação sobre o que acontece de fato nesse sistema. Por exemplo, realizando as contas como foram feitas aqui, ao invés de utilizar o contorno de Landau, acabamos desprezando um termo da frequência  $\omega$  que é pequeno, mas possui grande importância na dinâmica desse sistema. Este termo é imaginário,  $\omega_i = i \frac{\pi \omega_e^3}{2k^2} \partial_u f_{e0} / u = \omega_r / k$ , nos dando a frequência verdadeira dessas ondas pela equação

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \quad (3.27)$$

$$\omega = \omega_e \left( 1 + \frac{3v_e^2 k^2}{\omega_e^2} \right)^{1/2} + i \frac{\pi \omega_e^3}{2k^2} \frac{\partial f_{e0}}{\partial u} \Big|_{u=\omega_r/k} \quad (3.28)$$

onde  $\omega_r$  é a parte real da frequência, que é o que chegamos na expressão (3.26), e mostra que há um amortecimento dessas ondas, o chamado **amortecimento de Landau** (*Landau damping*) [10], que faz com que as ondas com velocidades de fase  $v_p$  tal que  $\partial_u f_{e0}(v_p) < 0$  percam energia com o tempo.

Intuitivamente, o amortecimento de Landau ocorre pois as partículas interagem com ondas. Uma onda de Langmuir com velocidade de fase  $v_p$  é "empurrada" (ganha energia) por partículas com velocidade  $v > v_p$ , e "empurra" (fornece energia) para partículas com velocidade  $v < v_p$ . Numa distribuição maxwelliana há mais partículas com velocidade menor que  $v_p$  do que partículas com velocidade maior que  $v_p$ , então o resultado final é que a onda acaba fornecendo mais energia do que recebe, e acaba por ser amortecida.

## 3.2 Teoria Quase Linear

O primeiro passo para a construção da teoria da turbulência fraca, é começar pela teoria quase linear, em que combinamos resultados obtidos na teoria linear, com resultados obtidos quando damos um pouco mais de liberdade para as nossas suposições iniciais.

Por exemplo, se supusermos que as nossas condições são

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= f_{s0}(\mathbf{v}, t) + f_{s1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

(note que neste caso, estamos permitindo que  $f_{s0}$  evolua com o tempo, mas veremos que essa evolução é lenta) e que as médias espaciais dessas quantidades são  $f_{s \mathbf{x}} = f_{s0}$ ,  $f_{s1 \mathbf{x}} = 0$  e  $\mathbf{E}_{1 \mathbf{x}} = 0$ , podemos colocar as quantidades (3.29) na equação de Vlasov (2.40) e tirar as médias espaciais

$$\frac{\partial f_{s\mathbf{x}}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{s\mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} \left\langle \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s\mathbf{x}} \right\rangle = 0 \quad (3.30)$$

Seguindo as definições feitas na equação 3.29, temos que o primeiro termo será  $\partial_t f_{s0}$ , o segundo termo será nulo ( $f_{s0}$  não depende de  $\mathbf{x}$ , e a média espacial da derivada de  $f_{s1}$  é zero), e no terceiro termo teremos produtos de diferentes quantidades

$$\frac{\partial f_{s0}}{\partial t} + \frac{q_s}{m_s} \left[ \underbrace{\mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0}}_0 + \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} \right] = 0 \quad (3.31)$$

onde o termo sublinhado é nulo pois  $f_{s0}$  não depende de  $\mathbf{x}$ , então a média espacial é  $\mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0$ , resultando em

$$\frac{\partial f_{s0}}{\partial t} + \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial f_{s0}}{\partial t} = -\frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} \quad (3.33)$$

este resultado nos mostra que a função distribuição média varia no tempo, apesar de que lentamente (em segunda ordem) em comparação com a variação dos desvios, que evoluem numa escala de tempo rápida.

Colocando as condições 3.29 de volta na equação de Vlasov, chegamos em

$$\frac{\partial (f_{s0} + f_{s1})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (f_{s0} + f_{s1}) + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} (f_{s0} + f_{s1}) = 0 \quad (3.34)$$

$$\underbrace{\frac{\partial f_{s0}}{\partial t}}_{3.33} + \frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{s0}}_0 + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} + \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} - \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s1} \quad (3.36)$$

no lado esquerdo dessa equação, temos somente termos de primeira ordem, que são os mesmos que obtivemos quando linearizamos o sistema Vlasov-Maxwell, e do lado direito, temos termos de segunda ordem. Ou seja, a evolução temporal de primeira ordem, está relacionada com termos de segunda ordem. Esse padrão se repete, de forma que para descrever um sistema de ordem  $n$ , precisamos de termos de ordem  $n + 1$ , tornando o sistema aberto. Para resolver esse problema, contamos com as magnitudes das quantidades de ordem maior, que são muito menores que a unidade, e assim desprezamos termos de segunda ordem, nos dando então

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_{s1} + \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{s0} = 0 \quad (3.37)$$

que é exatamente a mesma equação que chegamos na aproximação linear. A diferença é que agora  $f_{s0}$  não é estática, e evolui de acordo com 3.33, que pode ser escrita como uma



equação de difusão no espaço de velocidades. O procedimento realizado para chegar na equação da evolução temporal de  $f_{s0}$  pode ser encontrado em textos padrão da literatura. [1, 9]

Com essa nova informação, conseguimos não só descrever o estado inicial de diferentes distribuições, como no caso linear, mas sim analisar a evolução temporal desses sistemas. Um sistema interessante de se estudar a evolução é o caso da distribuição *bump in tail* (corcova na cauda), onde há uma maxwelliana principal, de grande densidade, centralizada em  $u = 0$ , e uma maxwelliana de baixa densidade, centralizada em  $u = v_b$ , como mostrado na figura 2. Essa distribuição pode ser pensada como um plasma termalizado de fundo, e um feixe pouco denso com velocidade maior passando por ele, criando uma distribuição com duas corcovas.

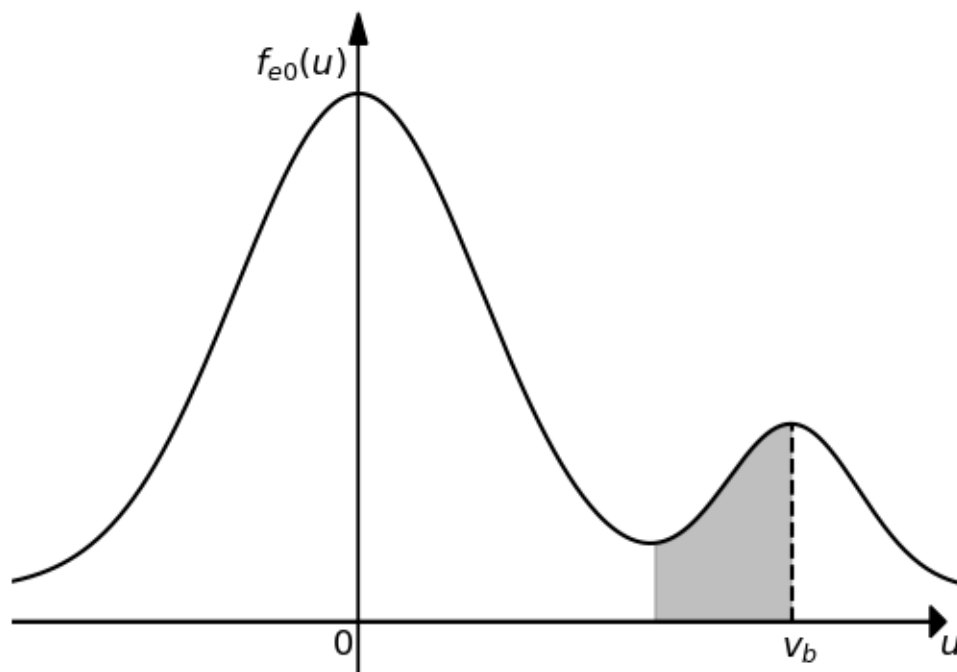


Figura 2 – Curva da distribuição bump in tail unidimensional. A curva é composta por uma maxwelliana de grande densidade centralizada em  $u = 0$ , e uma maxwelliana de baixa densidade centralizada em  $u = v_b$  ( $v$  beam -  $v$  feixe). A região sombreada é uma região onde a derivada  $\partial_u f_{e0}(u)$  é positiva

A instabilidade *bump in tail* acontece quando um feixe de plasma incide na distribuição de fundo, dando origem a ondas Langmuir que, como citado na seção anterior, possuem uma parte imaginária na frequência que depende do sinal da derivada  $\partial_u f_{s0}/u=\omega_r/k$ . Como supomos ondas planas da forma  $\mathbf{E}_1 \exp\{ikx - i\omega t\}$ , a parte imaginária da frequência positiva resulta num expoente real e positivo, que dá origem a uma instabilidade (crescimento exponencial). Isso significa que na região de partículas que estão em ressonância com as ondas ( $u = \omega_r/k$ ), e que a derivada é positiva (região mais escura na figura 2), haverá um aumento da intensidade dessas ondas, que influenciam a evolução de  $f_{s0}$ , que

tende a aumentar o número de partículas dessa região. Como é impossível que as ondas cresçam indefinidamente, é preciso de algum mecanismo que pare o crescimento delas. Intuitivamente, temos dois caminhos para isso: 1) eliminar todas as partículas ressonantes ou 2) eliminar a região de derivada positiva da função distribuição.

É possível mostrar que o número de partículas ressonantes não se altera com o tempo [1, 3], então o que acontece é que a derivada da função distribuição na região de interesse deixa de ser positiva, formando um platô na região, como pode ser visto na figura 3 abaixo:

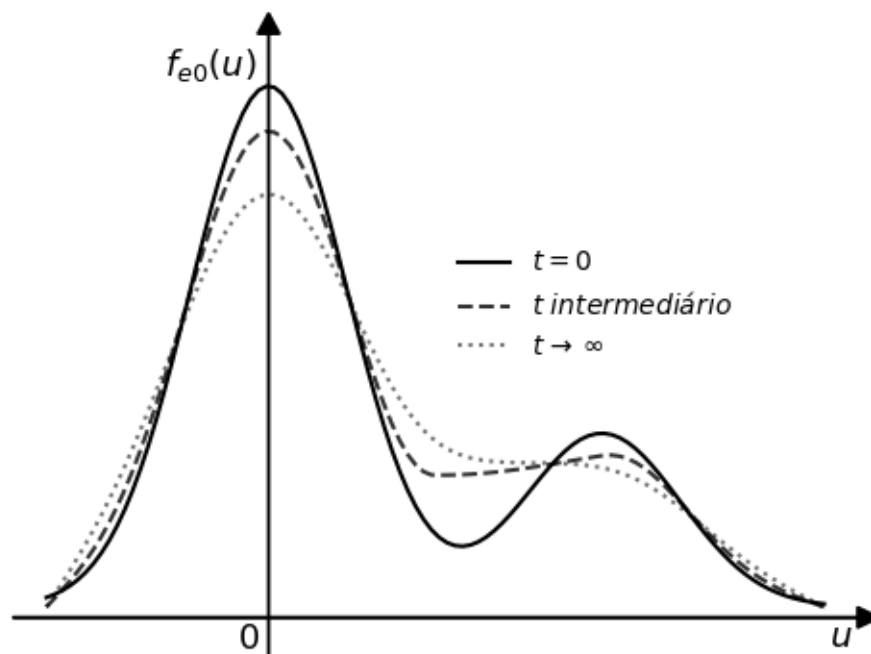


Figura 3 – Evolução temporal da distribuição bump in tail na teoria quase linear em diferentes tempos. É possível ver que no limite  $t \rightarrow \infty$ , há a formação de um platô na região que antes possuía derivada positiva

### 3.3 Teoria de Turbulência Fraca

Assim como a teoria quase linear foi construída em cima da teoria linear, apenas relaxando algumas suposições, o mesmo será feito agora, com a teoria da turbulência fraca. Antes de fazer isso, é importante esclarecer o motivo de estarmos fazendo isso. A teoria linear nos mostrou que há a geração de ondas de alta frequência quando há perturbações de primeira ordem no plasma.

A teoria quase linear nos mostrou que a descrição que tínhamos não era completa, e que para se obter uma descrição mais completa do sistema, e descrever fenômenos e sistemas mais ricos (como a distribuição bump in tail), era necessário relaxar algumas suposições, e vimos que a função distribuição de equilíbrio evolui lentamente no tempo.

De forma parecida, a teoria de turbulência fraca consegue descrever fenômenos mais complexos, e nos dá mais informações sobre a interação feixe-plasma. Nesta abordagem, iremos considerar termos de até segunda ordem, e também iremos permitir que a amplitude da perturbação  $f_{s1}$  evolua no tempo. Assim, temos

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = F_s(\mathbf{v}, t) + \delta f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (3.38)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (3.39)$$

colocando essas quantidades na equação de Vlasov, nos dará equações iguais às equações obtidas para a evolução temporal de  $f_{s0}$  e  $f_{s1}$  do caso quase linear (3.33, 3.36). Para fechar esse sistema, também usaremos a lei de Gauss. Desta forma, temos

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = -\frac{q_s}{m_s} \delta \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta f_s \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \delta f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \delta f_s + \frac{q_s}{m_s} \delta \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_s = \frac{q_s}{m_s} \delta \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta f_s - \frac{q_s}{m_s} \delta \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta f_s \quad (3.41)$$

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{E} = 4\pi q_s n \int d\mathbf{v} \delta f_s \quad (3.42)$$

Escrevendo as perturbações utilizando suas transformadas de Fourier-Laplace inversas, temos

$$\delta f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^s(\mathbf{v}, t) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \quad (3.43)$$

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega}(t) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \quad (3.44)$$

Colocando essas quantidades nas equações uma a uma (e substituindo  $\nabla_{\mathbf{v}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ ), temos que (3.40) fica

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = -\frac{q_s}{m_s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int_{\mathbf{k}, \omega} \int_{\mathbf{k}', \omega'} \langle \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^s \rangle e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x} - (\omega+\omega')t} \quad (3.45)$$

onde o argumento das quantidades transformadas ficou  $\mathbf{k}, \omega$  e  $\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'$  pois a transformada de um produto de funções é uma convolução.

Escrevendo agora a equação (3.41), aplicando as transformadas nas quantidades  $\delta f_s$  e  $\delta \mathbf{E}$  (e multiplicando ambos os lados por  $i$ ), temos

$$\begin{aligned} \left( \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta f_{\mathbf{k}, \omega}^s &= -i \frac{q_s}{m_s} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_s \\ &+ i \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int_{\mathbf{k}'} \int_{\omega'} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}, \omega} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^s \\ &- i \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int_{\mathbf{k}'} \int_{\omega'} \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k}', \omega'} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^s \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde as integrais em  $\mathbf{k}$  e  $\omega$  foram canceladas pois existiam em todos os termos dessa equação, e a derivada temporal do lado esquerdo surge pela regra doproduto quando fazemos  $\partial_t \delta f_s$ .

E por fim, a lei de Gauss fica

$$\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{E}_{\mathbf{k},\omega} = -4i\pi n \sum_s q_s \int d\mathbf{v} \delta f_{\mathbf{k},\omega}^s \quad (3.47)$$

De forma similar às teorias linear e quase linear, em que chegamos na relação de dispersão a partir de equações similares às equações acima, na teoria da turbulência fraca conseguimos fazer o mesmo.

Resolvendo a equação para  $\delta f_{\mathbf{k},\omega}^s$  de forma iterativa, obtemos a equação não linear espectral de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \delta E^2_{\mathbf{k},\omega} + \frac{i}{2} \frac{\partial \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \delta E^2_{\mathbf{k},\omega}}{\partial t} + 2 \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} \left[ \left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega / \mathbf{k} - \mathbf{k}, \omega - \omega) \right\}^2 \right. \\ \times \left( \frac{\delta E^2_{\mathbf{k}-\mathbf{k}, \omega - \omega}}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} + \frac{\delta E^2_{\mathbf{k}, \omega}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}, \omega - \omega)} \right) \delta E^2_{\mathbf{k},\omega} \\ \left. - \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega / \mathbf{k} - \mathbf{k}, \omega - \omega)|^2}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \delta E^2_{\mathbf{k},\omega} \delta E^2_{\mathbf{k}-\mathbf{k}, \omega - \omega} \right] \\ - 2 \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}, \omega / -\mathbf{k}, -\omega / \mathbf{k}, \omega) \delta E^2_{\mathbf{k},\omega} \delta E^2_{\mathbf{k},\omega} = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \chi(\mathbf{k}, \omega)$  é a resposta dielétrica linear,  $\chi^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 / \mathbf{k}_2, \omega_2)$  é a susceptibilidade não linear de segunda ordem, e  $\bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 / \mathbf{k}_2, \omega_2 / \mathbf{k}_3, \omega_3)$  é a susceptibilidade parcial de terceira ordem [11, 12], e as susceptibilidades são dadas por

$$\chi(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi q_s n_s}{k^2} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k},\omega} F_s \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \chi^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 / \mathbf{k}_2, \omega_2) = -\frac{1}{2} \frac{4\pi i q_s n_s}{k_1 k_2 / \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{g}_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega_1 + \omega_2} \\ \times [\mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_2, \omega_2}) + \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_1, \omega_1})] F_s \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 / \mathbf{k}_2, \omega_2 / \mathbf{k}_3, \omega_3) = \frac{1}{2} \frac{4\pi q_s n_s}{k_1 k_2 k_3 / \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3} \int_{\mathbf{v}} (\mathbf{g}_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \cdot \mathbf{k}_1) \\ \times \mathbf{g}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \omega_2 + \omega_3} \cdot [\mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_3, \omega_3}) + \mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}_2, \omega_2})] F_s \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde o operador  $\mathbf{g}_{\mathbf{k},\omega}$  é definido como

$$\mathbf{g}_{\mathbf{k},\omega} = -\frac{q_s}{m_s} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\epsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.52)$$

Assumindo que  $\delta E^2$  é da forma

$$\delta E^2 = \sum_{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} [\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})] \quad (3.53)$$

onde  $\alpha$  é um tipo de onda (por exemplo,  $\alpha = L$  para ondas de Langmuir, ou  $\alpha = S$  para ondas íon-acústicas).

Após uma análise de cada um dos termos, levando em conta os tipos de interação de ondas possíveis, e realizando algumas aproximações nos cálculos das susceptibilidades, chegamos nas equações de evolução de cada uma das ondas. Primeiro, a equação de evolução temporal da intensidade das ondas de Langmuir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} &= \mu_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{\mathbf{v}} \left[ ne^2 F_e(\mathbf{v}) + \pi(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \right] \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ &\quad - \pi\sigma\mu_{\mathbf{k}}^L \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{2T_e^2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}}^L \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \\ &\quad \times \left( \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} + \sigma'\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

A evolução temporal da intensidade das ondas íon-acústicas é

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} &= \mu_{\mathbf{k}}^S \frac{\omega_{pe}}{k^2} \int_{\mathbf{v}} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[ ne^2 [F_e(\mathbf{v}) + F_i(\mathbf{v})] \right. \\ &\quad \left. + \pi(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S) \left( \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} \right] \\ &\quad - \pi\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{e^2}{4T_e^2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}}^S \mu_{\mathbf{k}}^L \mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \\ &\quad \times \left( \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}^S} + \sigma'\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} - \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S} \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

E a evolução temporal da função distribuição é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v_i} \left[ A_i(\mathbf{v}) F_e(\mathbf{v}) + D_{ij}(\mathbf{v}) \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial v_j} \right] \\ A_i(\mathbf{v}) &= \frac{e^2}{4\pi m_e} \int d\mathbf{k} \frac{k_i}{k^2} \sum_{\sigma} \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ D_{ij} &= \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^2} \sum_{\sigma} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde  $\mu_{\mathbf{k}}^{L,S}$  é um peso associado a cada um dos tipos de onda ( $\mu_{\mathbf{k}}^L = 1$ ,  $\mu_{\mathbf{k}}^S = k^3 \lambda_D^3 (m_e/m_i)^{1/2} (1 + 3T_e/T_i)^{1/2}$ ), e  $\sigma, \sigma', \sigma''$  indicam as possíveis direções das ondas, e podem ser  $\pm 1$ , então há várias combinações de possíveis ondas que contribuem para a evolução do sistema. O desenvolvimento apresentado nesta seção consiste numa versão resumida do desenvolvimento apresentado no artigo de P. Yoon, 2000 [12]. Assim como no trabalho de Ziebell et. al [13], o termo de espalhamento onda-partícula na equação 3.54 foi desprezado, mantendo somente os termos de emissão espontânea, emissão induzida e decaimento envolvendo três ondas.

É importante salientar que o termo de emissão espontânea (primeiro termo) nas equações (3.54, 3.55, 3.56) não é obtido ao usar as condições (3.38, 3.39) na equação de Vlasov, mas sim de um procedimento usando a equação de Klimontovich, que leva em consideração as médias de ensemble do sistema.

Essas três equações formam o sistema que será analisado numericamente na próxima seção.

## 4 Análise numérica e resultados

Na literatura já existem vários trabalhos que analisam a interação feixe-plasma e a evolução das ondas de Langmuir e íon-acústicas no caso bidimensional [13–18]. Nesses trabalhos, o feixe é sempre isotrópico em relação às suas temperaturas paralela e perpendicular (em relação ao campo magnético), e é formado por uma maxwelliana de baixa densidade.

Dessa forma, a função distribuição total é escrita como a soma de uma maxwelliana de alta densidade, e outra de baixa densidade. No caso em que a velocidade perpendicular do feixe é nula, temos

$$F_e = \left(1 - \frac{n_b}{n_e}\right) \frac{1}{\pi T_e} \exp\left\{\frac{1}{T_e} \left[-u^2 - (u - u_0)^2\right]\right\} + \frac{n_b}{n_e} \frac{1}{\pi T_e} \exp\left\{\frac{1}{T_b} \left[-u^2 - (u - u_b)^2\right]\right\} \quad (4.1)$$

onde todos os termos com subscrito "b" indicam que é uma quantidade associada ao feixe (*beam*, em inglês), e as velocidades  $v$  e  $v$  são agora chamadas de  $u$  e  $u$ , após adimensionalização do sistema. Nesse caso, como a temperatura do feixe é única,  $T_b$ , o feixe é isotrópico. Quando vamos descrever um feixe com temperaturas diferentes nas direções paralela e perpendicular, a equação 4.1 precisa ser mudada, e escrita como

$$F_e = \left(1 - \frac{n_b}{n_e}\right) \frac{1}{\pi T_e} \exp\left\{\frac{1}{T_e} \left[-u^2 - (u - u_0)^2\right]\right\} + \frac{n_b}{n_e} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{T_b T_b}} \exp\left\{-\frac{u^2}{T_b} - \frac{(u - u_b)^2}{T_b}\right\} \quad (4.2)$$

Essa é a equação que descreve a função distribuição inicial, que será evoluída no tempo usando 3.56.

Já para definirmos os espectros iniciais das ondas  $L$  e  $S$ , igualamos a contribuição dos termos de emissão espontânea e induzida, e com isso ficamos com

$$I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}(0) = \frac{T_e}{4\pi^2} \frac{1}{1 + 3k^2\lambda_D^2} \quad (4.3)$$

$$I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}(0) = \frac{T_e}{4\pi^2} k^2 \lambda_D^2 \sqrt{\frac{1 + k^2\lambda_D^2}{1 + 3k^2\lambda_D^2}} \times \frac{\int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) [F_e + F_i]}{\int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) [F_e + (T_e/T_i)F_i]} \quad (4.4)$$

Com isso, agora podemos utilizar as equações 3.54, 3.55 e 3.56 e simular a evolução temporal do sistema.

Para uma comparação entre os casos isotrópicos e anisotrópicos, neste trabalho serão utilizados os mesmos parâmetros utilizados em trabalhos da literatura [13]. Foram usadas

grades de dimensão  $51 \times 51$  para os números de onda  $k_x$  e  $k_y$ , com valores  $0 < k_x v_e / \omega_p < 0.5$  e  $0 < k_y v_e / \omega_p < 0.5$ . Para as velocidades  $v_x$  e  $v_y$ , foram usadas grades de dimensão  $101 \times 51$ , com valores  $-12 < v_x / v_e < 12$  e  $0 < v_y / v_e < 12$ . Foi utilizada uma densidade do feixe  $n_b / n_e = 2.0 \times 10^{-4}$ , velocidade do feixe  $v_b = 5.0 v_e$ , razão de temperatura dos elétrons e íons  $T_e / T_i = 7.0$ , e parâmetro de plasma  $(n_0 \lambda_D^3)^{-1} = 4.47 \times 10^{-3}$ . A diferença entre os parâmetros só acontece na temperatura do feixe. No(s) trabalho(s) citados, a temperatura do feixe era igual à temperatura dos elétrons de fundo,  $T_b / T_e = 1.0$ . No presente trabalho, a temperatura do feixe varia dependendo da direção que estamos falando, isto é,  $T_b = T_b$ .

## 4.1 Evolução da função distribuição e espectro das ondas $L$ para diferentes temperaturas $T_b$ e $T_b$

Antes de partirmos para as figuras das diferentes configurações de temperatura, é importante que haja o entendimento intuitivo do que esperamos da função distribuição  $F_e$ . Em casos de  $T_b / T_e > 1$  e  $T_b / T_e = 1$ , o feixe terá a mesma espessura na direção perpendicular, mas será mais alongado na direção paralela, já que agora a diferença  $(u_x - u_b)$  precisa ser maior para ocorrer o decaimento exponencial. No caso, sempre que uma temperatura na direção genérica  $\alpha$  for maior que  $T_e$ ,  $T_{b\alpha} / T_e > 1$ , o feixe na direção  $\alpha$  será alongado. E quando  $T_{b\alpha} / T_e < 1$ , o feixe na direção  $\alpha$  será comprimido.

Foram escolhidos os tempos  $\tau = 0$  e  $\tau = 2000$  para a função distribuição para mostrar a distribuição inicial e a distribuição após um tempo suficiente para que ocorra a evolução do sistema, mas não tanto para saturá-lo. Foram escolhidos os tempos  $\tau = 500$  e  $\tau = 2000$  para o espectro das ondas pois  $I_{\mathbf{k}}^{\sigma L, S}(\tau = 0)$  foram definidos nas equações 4.3 e 4.4, e não nos trazem muitas informações sobre o sistema. Já em  $\tau = 500$  vê-se a evolução rápida das ondas, enquanto em  $\tau = 2000$ , se vê fenômenos mais lentos, como o retroespalhamento.

Neste trabalho optou-se por mostrar somente os espectros das ondas de Langmuir, pois os espectros das ondas íon-acústicas apresentam uma variação tão pequena que gera figuras indistinguíveis tanto na variação temporal, quanto na variação das temperaturas  $T_b$  e  $T_b$ , e por conta disso não trazem muita informação ao sistema. Os espectros obtidos para as ondas íon acústicas são visualmente indistinguíveis daqueles obtidos no trabalho [13].

### 4.1.1 $T_b / T_e = 3$ e $T_b / T_e = 1$

Primeiro vamos olhar o caso em que a temperatura do feixe na direção paralela é maior que a temperatura dos elétrons de fundo. Nesse caso, esperamos que a porção do feixe na  $F_e$  seja alongada na direção paralela.

Na figura 4 vemos que uma grande porção do feixe se encontra sobreposto ao plasma



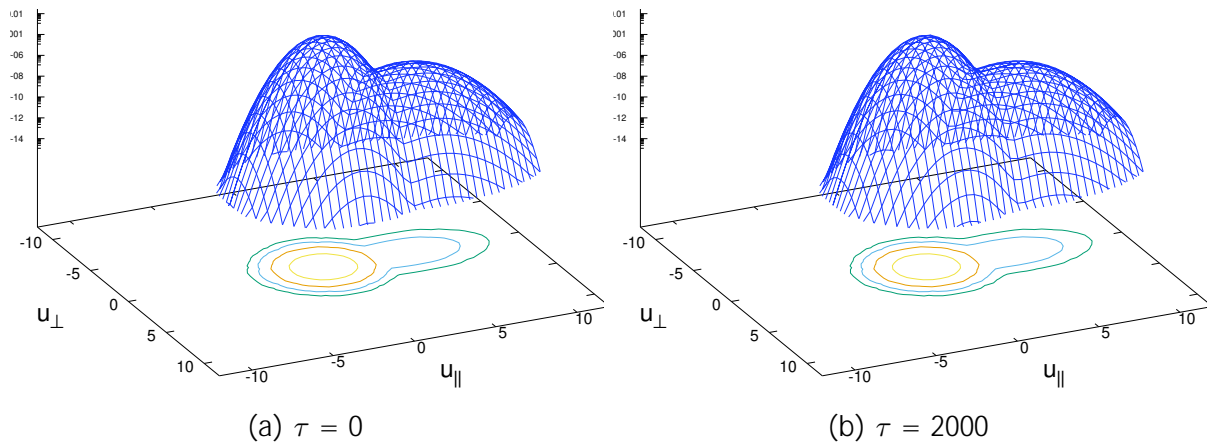


Figura 4 – Função distribuição  $F_e$  no caso em que  $T_b = 3$  e  $T_c = 1$  nos tempos a)  $\tau = 0$  e b)  $\tau = 2000$

de fundo na distribuição. Por conta disso, o encontro do feixe com o plasma de fundo acontece de forma bem suave, formando uma região de encontro com ângulo grande, com pouca profundidade. Por conta dessa região pouco profunda, a região de derivada positiva é de magnitude pequena, então podemos esperar crescimento lento das ondas de Langmuir da região. Como a evolução da função distribuição depende das interações das partículas com ondas de Langmuir, a evolução lenta de  $F_e$  não é nenhuma surpresa.

Além disso, a região de encontro decai mais lentamente ao redor de  $|u|$  pequenos, então podemos esperar um alargamento do espectro das ondas  $L$  na direção perpendicular.

O espectro das ondas  $L$  nos tempos  $\tau = 500$  e  $\tau = 2000$  pode ser visto na figura 5 abaixo.

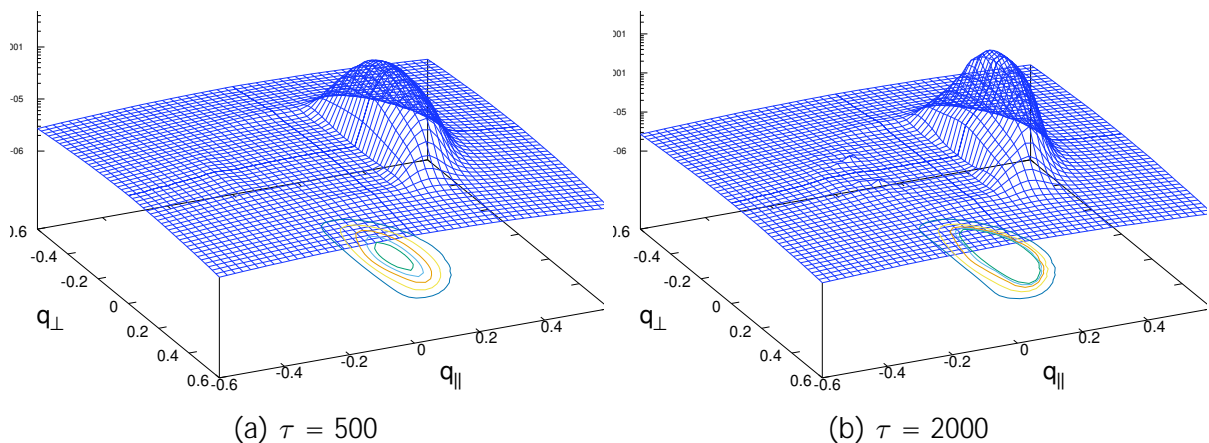


Figura 5 – a) Espectro das ondas de Langmuir no caso em que  $T_b = 3$  e  $T_c = 1$  nos tempos  $\tau = 500$  e b)  $\tau = 2000$

Na figura 5 é possível ver que não há muita mudança no formato do espectro com a evolução de  $\tau = 500$  até  $\tau = 2000$ , mas que a intensidade das ondas é maior em  $\tau = 2000$ . É possível ver também que começa a aparecer a contribuição de ondas retroespalhadas em  $q_{\parallel} \approx -0.2$ . As quantidades  $k_{\perp}$  e  $k_{\parallel}$ , quando adimensionalizadas, são denotadas por  $q_{\perp}$  e  $q_{\parallel}$ .

4.1.2  $T_b / T_e = 1$  e  $T_b / T_e = 3$

Neste caso, o feixe estará alongado na direção perpendicular.

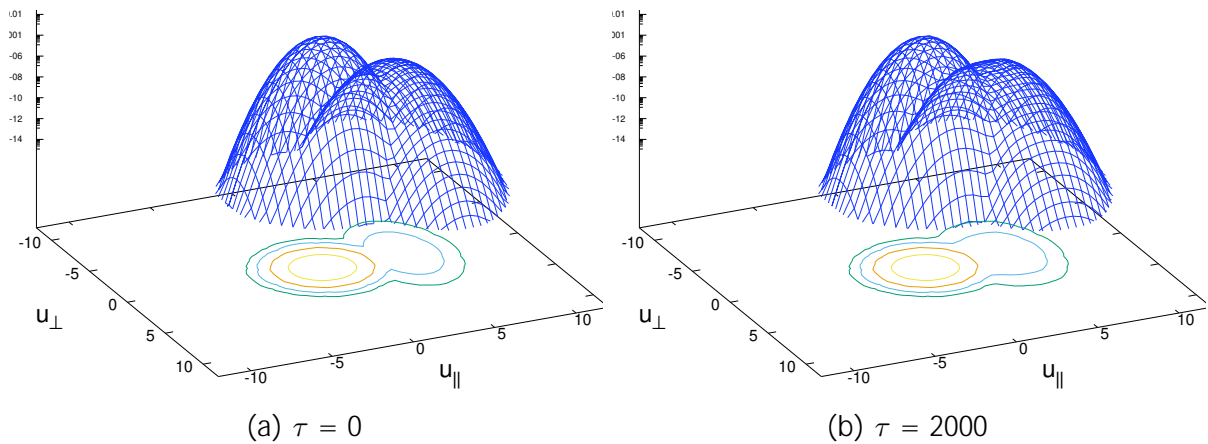


Figura 6 – Função distribuição  $F_e$  no caso em que  $T_b = 1$  e  $T_e = 3$  nos tempos a)  $\tau = 0$  e b)  $\tau = 2000$

Vemos na figura 6 que a região de encontro entre o feixe e o plasma de fundo é um pouco mais profunda nesse caso, já que o feixe não é alongado na direção paralela. Além disso, devido ao alongamento na direção perpendicular, a interface entre o feixe e o plasma de fundo se estende um pouco, e é mais curvada em direção a valores de  $u$  menores.

Em  $\tau = 2000$  o platô formado na função distribuição já é evidente, e evolui de forma muito mais rápida do que no caso em que as temperaturas do feixe eram invertidas.

O espectro das ondas  $L$  nos tempos  $\tau = 500$  e  $\tau = 2000$  pode ser visto na figura 7 abaixo.

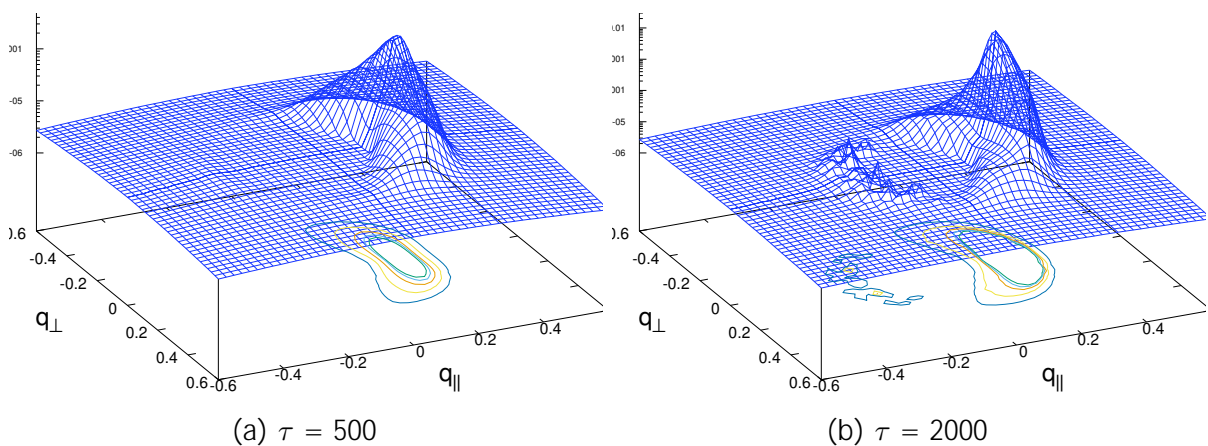


Figura 7 – Espectro das ondas de Langmuir no caso em que  $T_b = 1$  e  $T_e = 3$  nos tempos a)  $\tau = 500$  e b)  $\tau = 2000$

O formato do espectro das ondas visto na figura 7 fica mais curvado em direção a  $q$  menores, e fica muito mais visível o formato circular do espectro das ondas. Além disso, devido à intensidade de maior magnitude, as ondas retroespalhadas (em  $q = -0.2$ )

apresentam uma contribuição maior para o espectro total, e são muito mais aparentes do que no último caso. Também é possível ver que o pico do espectro é mais agudo do que no caso das temperaturas do feixe invertidas, e isso acontece pois a região de encontro do feixe com o plasma de fundo decai rapidamente.

#### 4.1.3 $T_b / T_e = 1$ e $T_b / T_e = 0.3$

Neste caso, o feixe estará regular na direção paralela, e comprimido na direção perpendicular.

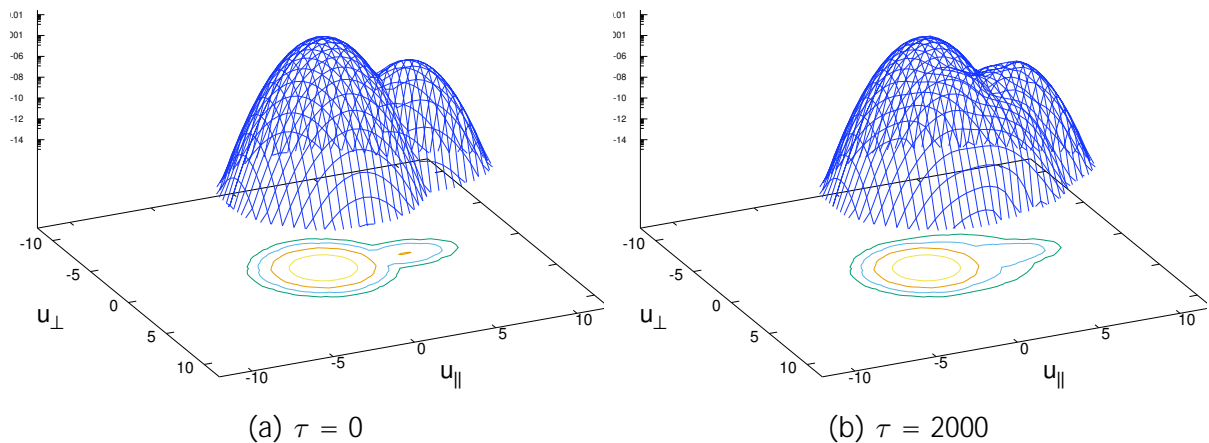


Figura 8 – Função distribuição  $F_e$  no caso em que  $T_b = 1$  e  $T_e = 0.3$  nos tempos a)  $\tau = 0$  e b)  $\tau = 2000$

A região de encontro do feixe com o plasma de fundo é mais alterada pela temperatura perpendicular, então neste caso, a profundidade da região de encontro será igual ao caso isotrópico. A magnitude da derivada na região não será muito elevada, e podemos esperar uma evolução regular do espectro das ondas  $L$ . É possível ver que em  $\tau = 2000$  a formação do platô já é bem evidente, e vemos que o plasma de fundo difunde ao redor do feixe, em direção à velocidades  $u$  maiores, indicando uma aceleração das partículas.

O espectro das ondas  $L$  nos tempos  $\tau = 500$  e  $\tau = 2000$  pode ser visto na figura 9 abaixo.

O espectro das ondas  $L$  neste caso é similar ao encontrado no caso  $T_b = 3$   $T_e = 1$ : pouco intenso e alargado na direção perpendicular, mas com a diferença de que neste caso, é mais comprimido na direção paralela. Essa similaridade vem do fato de terem estrutura parecida, apesar de temperaturas diferentes, já que o feixe é mais largo na direção paralela. Olhando o espectro em  $\tau = 2000$ , vê-se que a evolução é um pouco lenta. Isso fica evidente quando vemos a intensidade das ondas retroespalhadas em  $\tau = 2000$ , que são baixas.

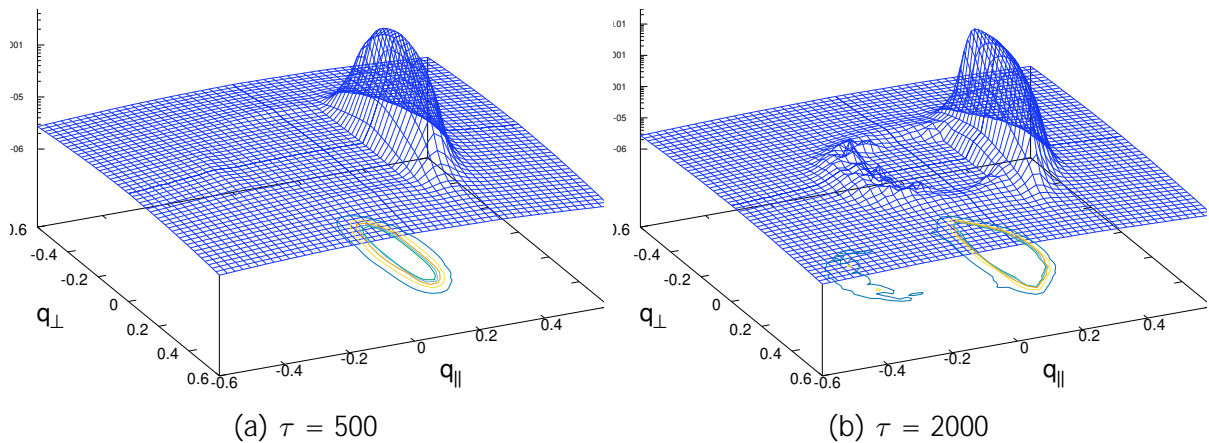


Figura 9 – Espectro das ondas de Langmuir no caso em que  $T_b = 1$  e  $T_e = 0.3$  nos tempos a)  $\tau = 0$  e b)  $\tau = 2000$

4.1.4  $T_b / T_e = 0.3$  e  $T_e / T_b = 1$

Neste caso, o feixe estará comprimido na direção paralela, e regular na direção perpendicular.

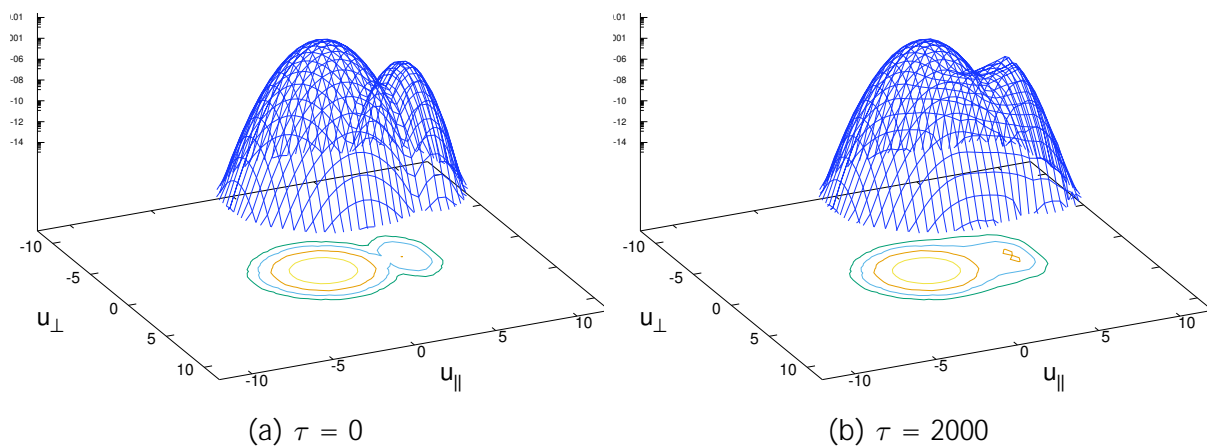


Figura 10 – Função distribuição  $F_e$  no caso em que  $T_b = 0.3$  e  $T_e = 1$  nos tempos a)  $\tau = 0$  e b)  $\tau = 2000$

A região de encontro do feixe com o plasma de fundo forma uma cúspide bastante profunda, ou seja, a magnitude na região de derivada positiva é grande, então esperamos uma evolução rápida das ondas de Langmuir. Essa intensidade elevada das ondas  $L$ , se traduz numa evolução rápida da  $F_e$ , e é possível ver que em  $F_e(\tau = 2000)$ , já há a formação do platô na região de encontro.

O espectro das ondas  $L$  nos tempos  $\tau = 500$  e  $\tau = 2000$  pode ser visto na figura 11 abaixo.

Em  $\tau = 500$  é possível ver que a intensidade máxima do espectro já é bem elevada, se compararmos com os casos anteriores. Esse crescimento intenso no espectro das ondas  $L$  ocorre devido à magnitude da derivada de  $F_e$  na região de encontro do feixe com o plasma. Nessa região, temos uma derivada positiva acentuada, mas a magnitude decai

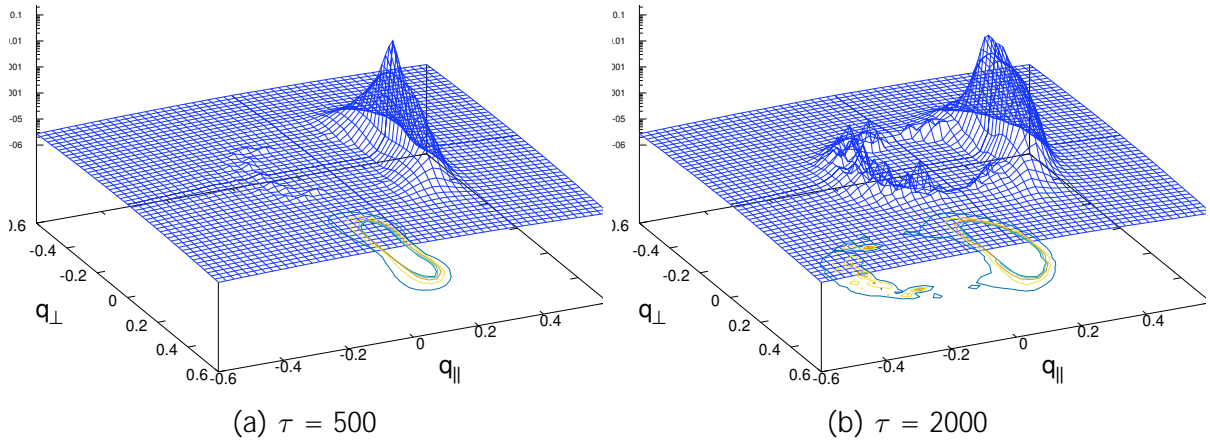


Figura 11 – Espectro das ondas de Langmuir no caso em que  $T_b = 0.3$  e  $T_e = 1$  nos tempos a)  $\tau = 0$  e b)  $\tau = 2000$

rapidamente na direção perpendicular, resultando no decaimento rápido do pico, o que dá a forma triangular para a curva. É possível ver também o crescimento rápido das ondas retroespalhadas, deixando a formação circular do espectro evidente rapidamente.

#### 4.1.5 $T_b / T_e = 3$ e $T_b / T_e = 0.3$

Agora que foi visto o efeito de aumentar/diminuir a temperatura em cada uma das direções isoladamente, está na hora de alterar a temperatura em ambas as direções simultaneamente. Esse tipo de situação pode ser interessante pois teremos extremos de temperatura em cada uma das direções, que podem trazer informações novas sobre a dinâmica do sistema anisotrópico.

Neste caso, temos  $T_b = 3$  e  $T_e = 0.3$ . Isso fará com que o feixe seja alongado na direção paralela, e comprimido na direção perpendicular.

A figura 12 abaixo mostra a função distribuição nos tempos  $\tau = 0$  e  $\tau = 2000$

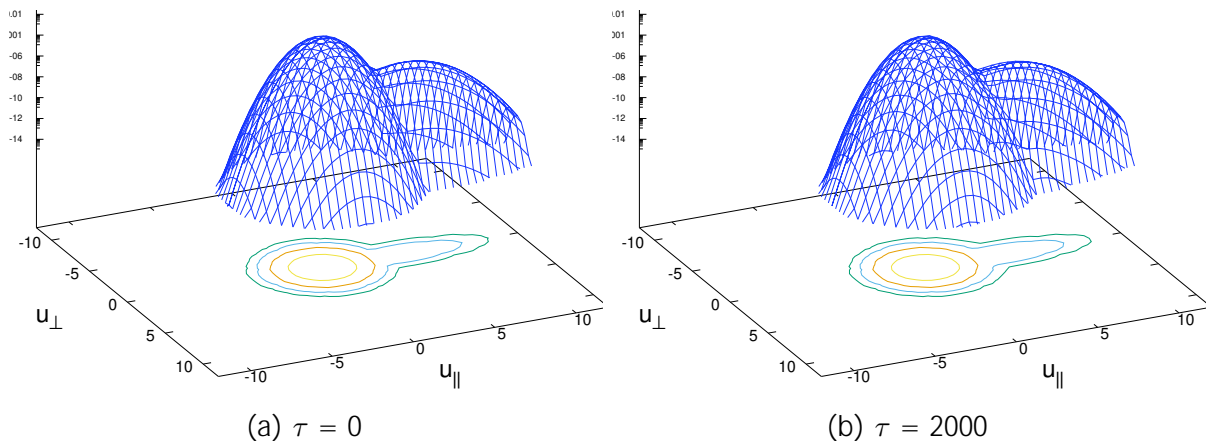


Figura 12 – Função distribuição  $F_e$  no caso em que  $T_b = 3$  e  $T_e = 0.3$  nos tempos a)  $\tau = 0$  e b)  $\tau = 2000$



Como visto no caso descrito na subseção 4.1.1, o feixe alongado na direção paralela tem uma região de encontro com o plasma de fundo pouco profunda, fazendo com que o crescimento das ondas seja menos acelerado. Também, como visto no caso 4.1.3, a compressão na direção paralela gera a difusão do plasma de fundo para velocidades maiores, em direção ao feixe, mostrando que há aceleração de partículas também neste caso, apesar de muito mais lenta. Esse processo de aceleração de partículas é mais lento pois com  $T_b = 3$ , a evolução das ondas  $L$  é lenta, e essas ondas são essenciais para a aceleração do plasma.

A figura 13 abaixo mostra o espectro das ondas  $L$  nos tempos  $\tau = 500$  e  $\tau = 2000$ .

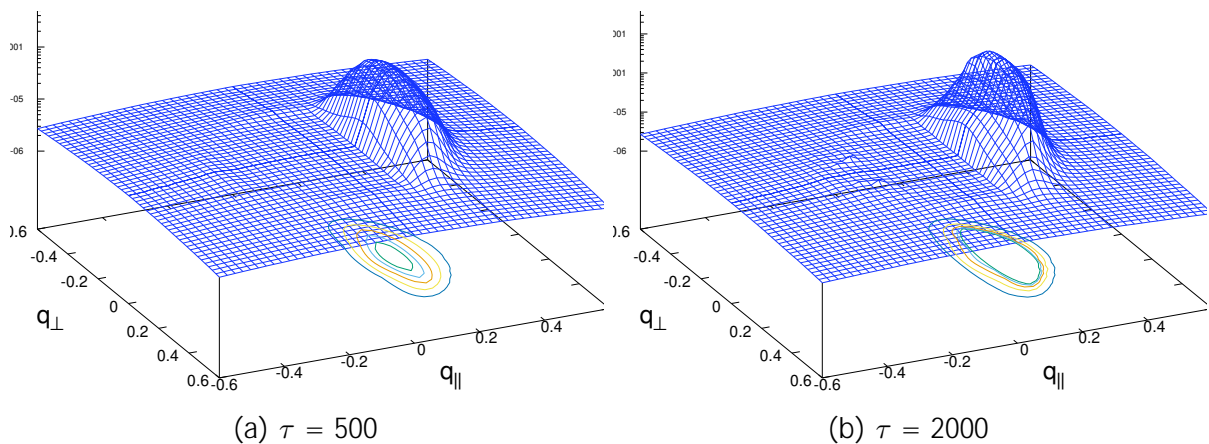


Figura 13 – Espectro das ondas de Langmuir no caso em que  $T_b = 3$  e  $T_b = 0.3$  nos tempos a)  $\tau = 0$  e b)  $\tau = 2000$

Nesse caso, temos a situação mista dos casos vistos nas subseções 4.1.1 e 4.1.3. Vemos que o espectro cresce de forma lenta, como no caso da figura 5. A evolução geral do espectro das ondas é bastante parecida com o caso  $T_b / T_e = 3$  e  $T_b = 1$ : lenta e alongada na direção perpendicular. Diferente do caso descrito em 4.1.3, neste caso não vemos uma contribuição significativa das ondas retroespalhadas, devido à lenta evolução que a temperatura paralela maior gera.

#### 4.1.6 $T_b / T_e = 0.3$ e $T_b / T_e = 3$

Neste caso, teremos uma combinação dos casos descritos nas subseções 4.1.4 e 4.1.2: Feixe comprimido na direção paralela, e alongado na direção perpendicular.

A figura 14 abaixo mostra a função distribuição nos tempos  $\tau = 0$  e  $\tau = 900$ .

Neste caso, a compressão do feixe na direção paralela cria uma região de derivada positiva com magnitude alta. Além disso, por conta do alargamento na direção perpendicular, a região de encontro do feixe com o plasma de fundo se estende para valores de  $u$  menores. Esses dois fatores combinados tornam a evolução das ondas muito rápida e intensa, de

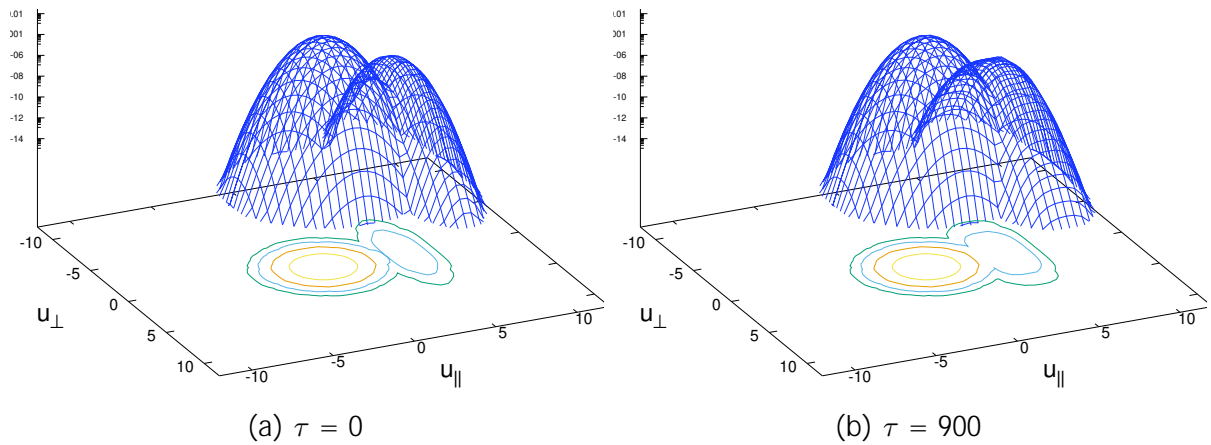


Figura 14 – Função distribuição  $F_e$  no caso em que  $T_b = 0.3$  e  $T_h = 3$  nos tempos a)  $\tau = 0$  e b)  $\tau = 900$

modo que a solução numérica neste caso acabou gerando valores sem sentido a partir de  $\tau = 960$ , por isso que é mostrado somente até  $\tau = 900$ .

A figura 15 abaixo mostra o espectro das ondas  $L$  nos tempos  $\tau = 500$  e  $\tau = 900$ .

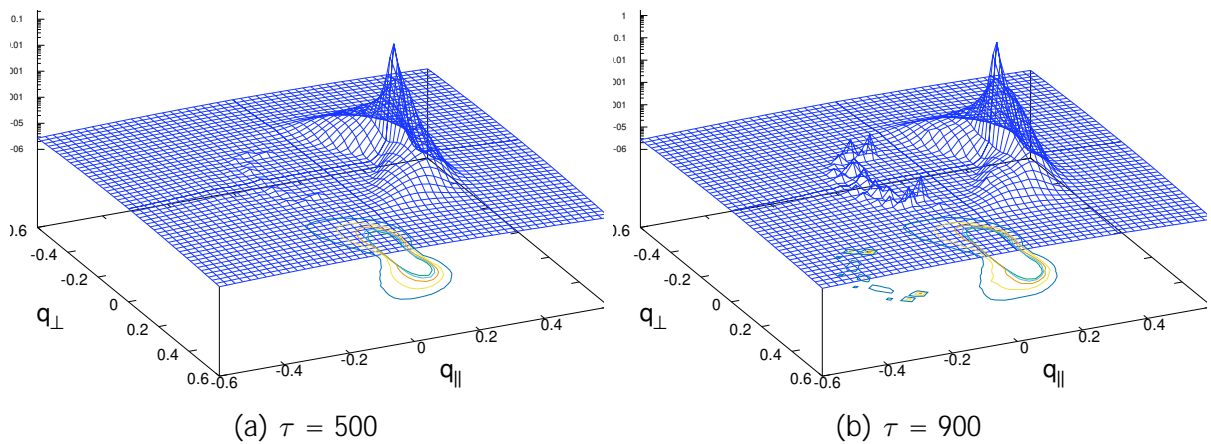


Figura 15 – Espectro das ondas de Langmuir no caso em que  $T_b = 0.3$  e  $T_h = 3$  nos tempos a)  $\tau = 0$  e b)  $\tau = 900$

É possível ver na figura 15 que o formato do espectro das ondas é bastante agudo, e se estende para valores de  $q$  menores, formando um anel circular. Além disso, é possível ver que a intensidade dessas ondas é bastante elevada, e que rapidamente já há o aparecimento das ondas retroespalhadas em  $\tau = 900$ , e o código utilizado acaba gerando valores sem sentido.

Isso não é nenhuma surpresa, já que na teoria da turbulência fraca assumimos que a amplitude das ondas se mantém pequena.

## 4.2 Intensidade máxima do espectro como função da temperatura paralela $T_b / T_e$

Na seção 4.1 vimos que para temperaturas  $T_b / T_e > 1$  o feixe é alargado na direção paralela, e tanto a evolução das ondas é mais lenta, como o pico do espectro é menos intenso, quando comparados com o caso em que  $T_b / T_e < 1$ . Por conta disso, nesta seção será analisado o comportamento do pico do espectro das ondas  $L$  como função da temperatura do feixe  $T_b / T_e$ , no tempo de evolução rápida  $\tau = 500$ .

A figura 16 mostra o logaritmo natural do valor máximo do espectro das ondas  $L$  em  $\tau = 500$  para diferentes valores de temperatura  $T_b / T_e$ , e a lei de potência que melhor ajusta os dados.

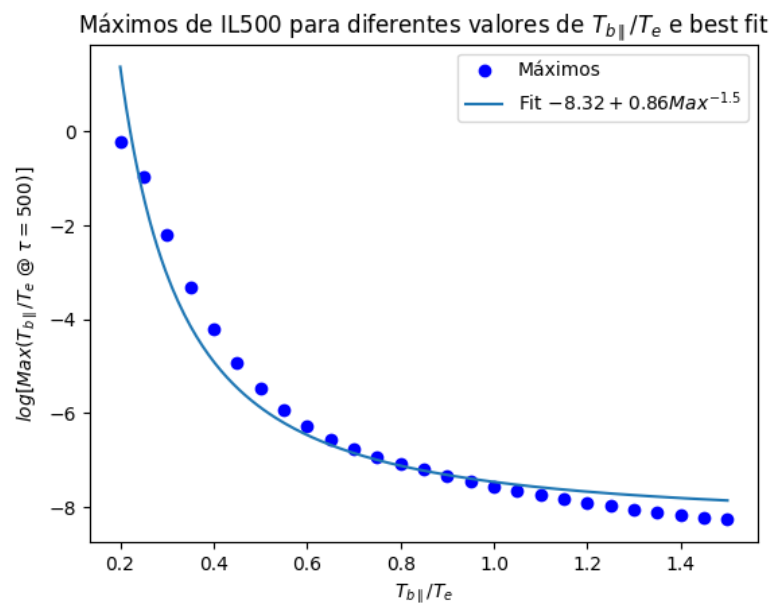


Figura 16 – Logaritmo natural do valor máximo da intensidade do espectro das ondas  $L$  em  $\tau = 500$  para diferentes valores de temperatura  $T_b / T_e$ , e lei de potência que melhor ajusta os pontos.

Como visto na seção 4.1, valores menores de temperatura paralela geram uma compressão no feixe na direção paralela, que acaba formando uma região de derivada positiva de maior magnitude na função distribuição, que acaba gerando uma evolução mais rápida das ondas de Langmuir. Na figura 16 vemos que o logaritmo natural da intensidade máxima do espectro no começo da evolução ( $\tau = 500$ ) segue uma curva que se aproxima de um decaimento com a potência  $-3/2$ . Essa forma de decaimento pode ser explicada com algumas suposições básicas sobre a natureza do crescimento das ondas  $L$ . Os cálculos para chegar no decaimento à potência  $-3/2$  podem ser vistos no apêndice A.



## 5 Comentários finais

Este trabalho teve como objetivo motivar a necessidade de se estudar a interação feixe-plasma com o feixe anisotrópico, e mostrar os efeitos da anisotropia no feixe causam na evolução temporal tanto da função distribuição, quanto do espectro das ondas  $L$ .

No capítulo 2, é mostrado como se chega na equação de Vlasov a partir das equações de movimento de partículas individuais, e é apresentado o sistema Vlasov-Maxwell. No capítulo 3 é mostrado como diferentes tratamentos do sistema Vlasov-Maxwell no caso eletrostático trazem mais informações sobre a dinâmica. Na teoria linear, vemos o surgimento de ondas de alta frequência, chamadas ondas de Langmuir, quando há perturbações de primeira ordem no campo elétrico. Na teoria quase linear, vemos que a função distribuição não é estática, mas que evolui lentamente a partir de uma equação de difusão no espaço de velocidades. Essa descrição nos permite analisar a evolução temporal de sistemas interessantes, como a distribuição *bump-in-tail*.

Por fim, chegamos na descrição da teoria de turbulência fraca. Nesta descrição, consideramos termos de mais alta ordem, e analisamos a interação de ondas de Langmuir e íon-acústicas.

Por fim, no capítulo 4 foi mostrado a mudança realizada na função distribuição para descrever um feixe anisotrópico, e mostrados diferentes casos de temperaturas  $T_b$  e  $T_\perp$ . Foi visto que diferentes combinações de temperaturas geram feixes mais alargados e comprimidos em certas direções, e que isso afeta não só o formato do espectro das ondas  $L$ , como também a velocidade com que essas ondas crescem, e a intensidade máxima que atingem. Para terminar, foi visto que o logaritmo da intensidade máxima do espectro das ondas  $L$  segue uma lei de potência com a temperatura paralela do feixe,  $T_b$ , na potência  $-3/2$ .

Os próximos passos da pesquisa se concentram em estudar configurações de anisotropia de temperatura do feixe similares àquelas encontradas no vento solar, afim de entender a dinâmica das ondas e da função distribuição nessas condições. Além disso, planeja-se realizar aprimoramentos no código numérico, afim de reduzir o número de aproximações, melhorar sua resolução e diminuir resultados ruidosos.

# A Proporcionalidade do valor máximo do espectro das ondas $L$ com a temperatura paralela do feixe

Neste apêndice será mostrado o porquê esperamos que a intensidade máxima do espectro das ondas  $L$  decai com a temperatura paralela do feixe seguindo uma lei de potência com expoente  $-3/2$ .

A equação 3.54 descreve a evolução temporal do espectro das ondas  $L$ . Nela há três termos: o primeiro é da forma

$$\mu_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{\mathbf{v}} n e^2 F_e(\mathbf{v}) \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{A.1})$$

este termo é associado às emissões espontâneas das ondas.

O segundo termo tem forma

$$\mu_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{\mathbf{v}} \pi(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\mu_{\mathbf{k}}^L} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{A.2})$$

e é associado às emissões induzidas.

E o terceiro termo é associado ao decaimento de ondas  $L$  e  $S$  em ondas  $L$ .

No começo da evolução, os termos de emissão são mais importantes que o termo de decaimento, e dentre esses, o termo de emissão induzida é mais significativo do que o termo de emissão espontânea, para a análise de alterações do espectro das ondas em relação ao estado inicial.

Olhando o termo de emissão induzida, vemos que é da forma

$$\frac{dI_{\mathbf{k}}^L}{dt} = \gamma(\mathbf{v}, \mathbf{k}, T_b) I_{\mathbf{k}}^L \quad (\text{A.3})$$

com  $\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{k}, T_b)$  definido como

$$\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{k}, T_b) = \mu_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{\mathbf{v}} \pi(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{A.4})$$

Como estamos olhando para o máximo da intensidade do espectro das ondas  $L$  no período de evolução rápida, podemos supor que  $\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{k}, T_b)$  não tem tempo para modificar tanto, e então iremos supor que este é constante.

O valor máximo de  $\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{k}, T_b)$  será no valor máximo de  $\frac{\partial F_e(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}$ . Para descobrirmos o valor máximo de  $\partial_{\mathbf{v}} F_e(\mathbf{v})$ , fazemos o teste da derivada primeira. Como queremos chegar

numa relação que depende da temperatura paralela, a partir de agora todas as contas serão feitas somente na dimensão paralela, e a dimensão perpendicular é integrada. Utilizando a função distribuição com velocidade adimensional (4.2), temos então

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial F_b(u)}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{2}{T_b} (u - u_b) F_b \right) \quad (\text{A.5})$$

$$= \left[ \frac{4}{T_b^2} (u - u_b)^2 - \frac{2}{T_b} \right] F_b \quad (\text{A.6})$$

O valor máximo do módulo de  $\frac{\partial F_b(u)}{\partial u}$  ocorre quando o termo entre colchetes é zero. Após uma álgebra simples, vemos que este máximo ocorre no valor  $(u - u_b)^2 = \frac{T_b}{2}$ .

Isso significa que no valor máximo de  $\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{k})$ , tirando constantes de proporcionalidade, temos

$$\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{k}, T_b) = -\frac{2}{T_b} (u - u_b) \sqrt{2/T_b} \quad (\text{A.7})$$

Ou seja,  $\gamma(\mathbf{v}, \mathbf{k}, T_b) \propto \frac{1}{T_b^{3/2}}$ .

Se resolvermos a equação diferencial A.3, chegamos em

$$\log I_{\mathbf{k}}^L(t) = -A(t) T_b^{-3/2} \quad (\text{A.8})$$

Com isso vemos que o logaritmo do valor máximo do espectro das ondas  $L$  decai com a temperatura paralela do feixe na potência  $-3/2$ .

# Bibliografia

1. Krall, N. A. & Trivelpiece, A. W. *Principles of Plasma Physics* ISBN: 0911302581 (San Francisco Pr, 1985).
2. Chen, F. F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* ISBN: 9783319223087 (Springer International Publishing, 2016).
3. Petruzzellis, L. *Evolução não linear de ondas eletrostáticas e eletromagnéticas no contexto da teoria de turbulência fraca em plasmas* Dissertação de mestrado (UFRGS, 2014).
4. Bittencourt, J. A. *Fundamentals of Plasma Physics* en. ISBN: 978-1-4419-1930-4 978-1-4757-4030-1. <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-4030-1> (2023) (Springer New York, New York, NY, 2004).
5. Hellinger, P., Trávní ek, P., Kasper, J. C. & Lazarus, A. J. Solar wind proton temperature anisotropy: Linear theory and WIND/SWE observations. *Geophysical Research Letters* **33**, L09101 (2006).
6. Kasper, J. C., Lazarus, A. J., Gary, S. P. & Szabo, A. Solar Wind Temperature Anisotropies. *AIP Conference Proceedings* **679**, 538 (2003).
7. Matteini, L. *et al.* Evolution of the solar wind proton temperature anisotropy from 0.3 to 2.5 AU. *Geophysical Research Letters* **34**, L20105 (2007).
8. Klimontovich, Y. *The Statistical Theory of Non-equilibrium Processes in a Plasma* ISBN: 9780080119663 (Pergamon Press, 1967).
9. Nicholson, D. *Introduction to Plasma Theory* ISBN: 9780471090458 (John Wiley & Sons, 1983).
10. Landau, L. On the vibrations of the electronic plasma. *Journal of Physics* **10**, 25–34 (1946).
11. Yoon, P. H. *Classical Kinetic Theory of Weakly Turbulent Nonlinear Plasma Processes* ISBN: 9781107172005 (Cambridge University Press, Cambridge, 2019).
12. Yoon, P. H. Generalized weak turbulence theory. *Physics of Plasmas* **7**, 4858–4871. ISSN: 1070-664X. eprint: [https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/7/12/4858/12419635/4858\\_1\\_online.pdf](https://pubs.aip.org/aip/pop/article-pdf/7/12/4858/12419635/4858_1_online.pdf). <https://doi.org/10.1063/1.1318358> (dez. de 2000).
13. Ziebell, L. F., Gaelzer, R. & Yoon, P. H. Dynamics of Langmuir wave decay in two dimensions. en. *Physics of Plasmas* **15**, 032303. ISSN: 1070-664X, 1089-7674. <https://pubs.aip.org/aip/pop/article/1015218> (2023) (mar. de 2008).

14. Ziebell, L. F. & Yoon, P. H. Electron Acceleration by Quasilinear Processes in the Presence of a Ring-beam Electron Population. en. *Brazilian Journal of Physics* **52**, 87. ISSN: 0103-9733, 1678-4448. <https://link.springer.com/10.1007/s13538-022-01085-9> (2023) (jun. de 2022).
15. Ziebell, L. F., Yoon, P. H., Petruzzellis, L. T., Gaelzer, R. & Pavan, J. Plasma Emission by Nonlinear Electromagnetic Processes. en. *The Astrophysical Journal* **806**, 237. ISSN: 1538-4357. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0004-637X/806/2/237> (2023) (jun. de 2015).
16. Ziebell, L. F., Gaelzer, R. & Yoon, P. H. Nonlinear development of weak beam-plasma instability. en. *Physics of Plasmas* **8**, 3982–3995. ISSN: 1070-664X, 1089-7674. <https://pubs.aip.org/aip/pop/article/8/9/3982-3995/265251> (2023) (set. de 2001).
17. Ziebell, L. F., Yoon, P. H., Gaelzer, R. & Pavan, J. Langmuir condensation by spontaneous scattering of electrons in two dimensions. en. *Plasma Physics and Controlled Fusion* **54**, 055012. ISSN: 0741-3335, 1361-6587. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0741-3335/54/5/055012> (2023) (mai. de 2012).
18. Ziebell, L. F., Gaelzer, R., Pavan, J. & Yoon, P. H. Two-dimensional nonlinear dynamics of beam-plasma instability. en. *Plasma Physics and Controlled Fusion* **50**, 085011. ISSN: 0741-3335, 1361-6587. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0741-3335/50/8/085011> (2023) (ago. de 2008).